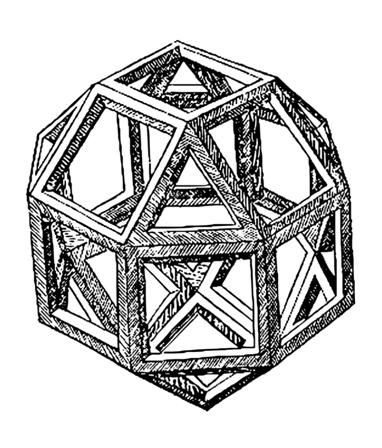
LUCA PACIOLI

LA DIVINA PROPORCIÓN



Terminado en diciembre de 1497 e impreso en Venecia en 1509, *La divina proporción* es una de las obras más representativas del ambiente científico y artístico de la Italia de finales del siglo XV, y constituye el punto de partida de los numerosos trabajos dedicados a las proporciones del cuerpo humano y la arquitectura que serían escritos en los siglos siguientes. La proporción matemática resultante de la división de un segmento en media y extrema razón es asumida en el tratado como principio universal y objetivo de belleza. Las innumerables correspondencias que dicha proporción guarda con las propiedades de la divinidad justifican el calificativo de «divina». Esta obra responde, en líneas generales, a la visión estética y filosófica del neoplatonismo de la época, que concebía la imagen del universo como una construcción armónica en la que el hombre y el arte vendrían a ser reflejos de un orden cósmico superior. La presente edición, realizada a partir del ejemplar manuscrito conservado en la Biblioteca Ambrosiana de Milán, incluye los 60 dibujos de los cuerpos geométricos que Leonardo realizó como ilustraciones del texto.





Luca Pacioli

LA DIVINA PROPORCIÓN

ePub r1.0

Titivillus 29.04.17

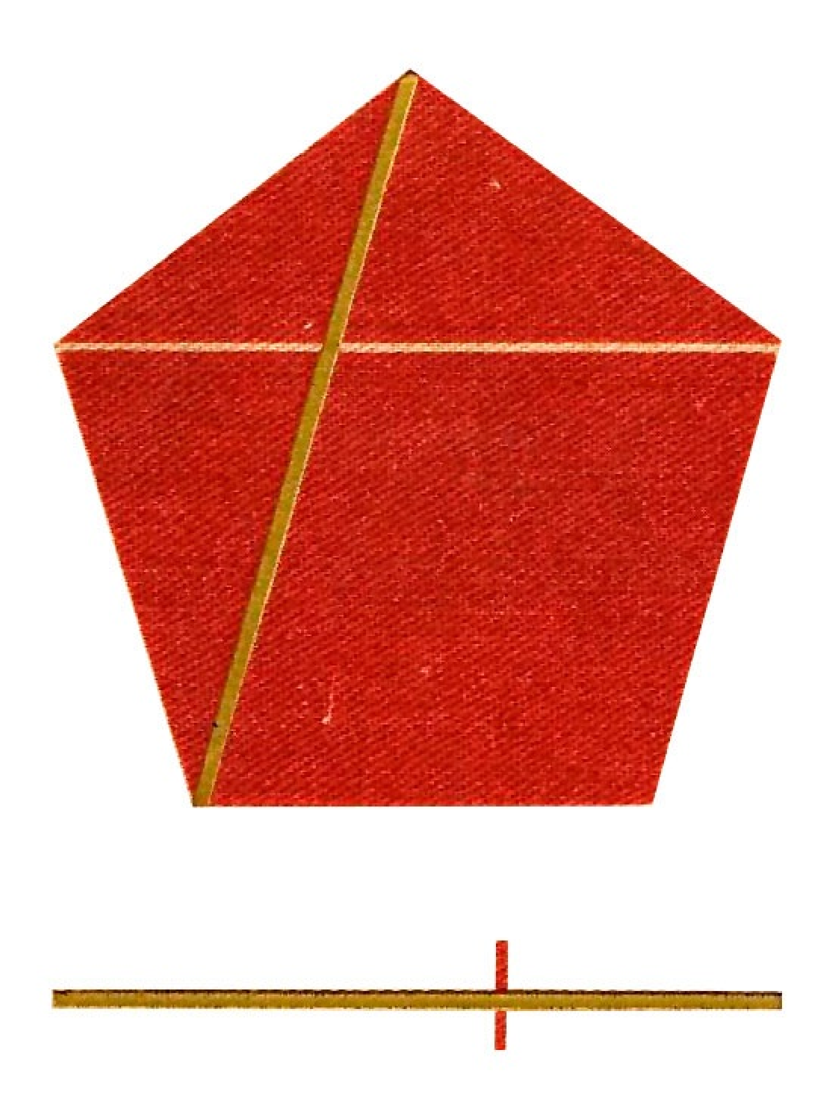
EDICIÓN DIGITAL

Título original: *Divina Proportione*
Luca Pacioli, 1509
Traducción: Ricardo Resta
Ilustraciones: Luca Pacioli, Leonardo da Vinci
Retoque de cubierta: El colega de Titivillus
Editor digital: Titivillus
ePub base r1.2
Edición digital: epublibre (EPL), 2017
Conversión a pdf: FS, 2018






4
ANIVERSARIO
EDICIÓN CONMEMORATIVA
EDICIÓN
CONMEMORATIVA
epublibre



LUCA PACIOLI
LA DIVINA PROPORCIÓN


EVCLIDES.

LUCA PACIOLI

LA DIVINA PROPORCIÓN

OBRA MUY NECESARIA A TODOS LOS INGENIOS PERSPICACES Y CURIOSOS, CON LA QUE TODO ESTUDIOSO DE FILOSOFÍA, PERSPECTIVA, PINTURA, ESCULTURA, ARQUITECTURA, MÚSICA Y OTRAS DISCIPLINAS MATEMÁTICAS CONSEGUIRÁ SUAVÍSIMA, SUTIL Y ADMIRABLE DOCTRINA, Y SE DELEITARÁ CON VARIAS CUESTIONES DE SECRETÍSIMA CIENCIA. TRADUCCIÓN DEL ITALIANO, DE LA EDICIÓN DE 1509, POR RICARDO RESTA. PRÓLOGO DE ALDO MIELI. SONETO DE RAFAEL ALBERTI. VEINTICINCO LÁMINAS EN HUECOGRABADO.



PRÓLOGO
DE ALDO MIELI



Inicial (tamaño agrandado), grabada sobre madera que según todos los bibliógrafos representa a LUCA PACIOLI. Se encuentra en su libro: *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalita*, Venecia, por Paganino de Paganini, 1494.

DESDE LA ANTIGÜEDAD HASTA EL RENACIMIENTO

VIDA Y OBRAS DE LUCA PACIOLI Y SU POSICIÓN EN EL DESARROLLO DE LA CIENCIA, EN EL RENACIMIENTO.

I. En el mundo clásico grecorromano, las ciencias matemáticas —las puras y muchas de las aplicadas— alcanzaron un desarrollo verdaderamente extraordinario. Con los nombres de Eukleides de Alexandreia (que vivía hacia el año 300 de nuestra era), ARCHIMEDES DE SIRAKOUSAI (287-212) y APOLLONIOS DE PERGE (hacia fines del siglo II a. C.) encontramos tres sabios sobresalientes, creador, el primero, de los clásicos *Elementos*; del tratado sobre las cónicas el último; y el segundo, el siracusano, un genio comparable a GALILEO y NEWTON y precursor del cálculo infinitesimal. No es menester aquí detenernos en tratar este tema. Aunque sobre ellos tenemos una extensa bibliografía, me limito a indicar dos escritos míos donde el lector encontrará referencias que pueden interesarnos para lo que vamos a tratar: *Histoire des Sciences: Antiquité*, París, 1935, que representa más bien una nueva obra que una nueva edición, hecha con la colaboración de PIERRE BRUNET, del *Manuale* publicado en Roma en 1925, y el breve *Panorama general de historia de la ciencia, griegos y romanos*, Buenos Aires, 1945, que comprende los puntos más esenciales.

Cuando entre los siglos IV y VIII de nuestra era se derrumbó el mundo clásico, comenzó en el Occidente cristiano una época de tinieblas en las ciencias; la matemática se redujo a lo que

encontramos en los magros compendios de BOETIUS y de ISIDORUS DE SEVILLA, que, no obstante, en aquellos siglos oscuros, presentaban no rara vez dificultades a sus lectores.

Pero en otros países se extendieron con renovado vigor varias disciplinas científicas: aquellas que después del siglo VIII florecieron en el mundo que se encontraba bajo la dominación e influencia del Islam. La matemática, en particular, aprovechando el aporte de Grecia y de la India, alcanzó límites y cumbres distintos, a los que no habían llegado los mismos griegos.

Así, en la numeración se estableció el sistema posicional y se inventó el cero, con MUHAMMAD IBN MÛSÂ AL-HUWARIZMÎ (s. IX) se fundó prácticamente el álgebra, que con UMAR AL-HAYYAMÎ llegó a la catalogación y a la solución práctica de ecuaciones de tercer grado; se desarrollaron completamente las funciones trigonométricas; etc., etc. Sin extenderme más sobre este asunto, indicaré también aquí dos escritos míos, uno más amplio, otro más compendioso: *La Science arabe*, Leiden, 1939, y el segundo volumen de mi *Panorama general de historia de la ciencia* titulado *El mundo islámico y el Occidente cristiano medieval*, Buenos Aires, 1946.

En el siglo XIII la sabiduría matemática de los griegos, con todo lo que el mundo islámico le había aportado, empezó a regresar a la Europa occidental. En gran parte este hecho se debe a un prestigioso sabio, LEONARDO PISANO, apodado FIBONACCI, a quien debemos considerar bajo el doble aspecto de transmisor de la matemática árabe y de sobresaliente investigador original. En 1202 publicó su *Líber abaci*, que obtuvo una nueva redacción en 1228; en 1223 su *Practica geometriae*; y en 1225 los dos escritos, menores de dimensión, pero de no menor valor científico, que es aún mayor por la originalidad y los progresos alcanzados, *Flos super solutionibus quarundam quaestionum ad*

numerum et geometriara vel ad utrumque pertinentium y *Líber quadratorum*.

No agrego otras consideraciones, habiendo tratado de este descollante sabio en mis dos últimos escritos mencionados.

Pero el adelanto conseguido por LEONARDO PISANO fue tan grande que no sólo no fue comprendido inmediatamente en toda su amplitud, sino que, aparte algunos temas particulares, las ciencias matemáticas no volvieron a hacer verdaderos progresos hasta el siglo XVI, en que encontramos la célebre serie de los "cossistas" y la resolución general de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, que está ligada a los nombres de SCIPIONE DEL FERRO (1465-1526), NICCOLÒ TARTAGLia (1505-1557), GEROLAMO CARDANO (1501-1567), LUDOVICO FERRARI (1522-1567), y otros. En los decenios que precedieron a estos hombres y acontecimientos, encontramos la prestigiosa figura de LUCA PACIOLI y su obra, que nos presenta, podemos decir, la totalidad de los conocimientos matemáticos existentes en toda Europa hacia 1500.

LOS ARTISTAS Y TÉCNICOS Y LAS APLICACIONES CIENTÍFICAS

II. Los historiadores de la ciencia que se han ocupado de su desarrollo en los siglos XV y XVI han considerado especialmente la ciencia que se puede llamar oficial: la que florecía en las universidades y en otros establecimientos de enseñanza, donde se manifestaba en el bárbaro latín de la escolástica, y la que florecía especialmente en producciones filosóficas y literarias y se expresaba en un latín que buscaba igualar al de CICERO y SALLUSTIUS, en el ambiente de los humanistas. Por el contrario, generalmente no han tratado, o sólo lo han hecho de manera insuficiente, de una de las corrientes más importantes para el desarrollo y el adelanto de la ciencia: la que se manifestaba en el ambiente de los artistas y de los técnicos, y con gran frecuencia empleaba la lengua vulgar. Como veremos, justamente a esta última corriente se ligan los nombres del mismo LUCA PACIOLI, cuyas relaciones con los artistas eran estrechísimas, y los de LIONARDO DA VINCI (1452-1519), cuyos méritos no es menester subrayar aquí; VANNOCCIO BIRINGUCCIO (1480-1539), el sobresaliente metalúrgico, químico y artífice, primer autor de un verdadero tratado de minería, de metalurgia y de las fundiciones de piezas de artillería, campanas y pequeños objetos de bronce; el notable técnico francés BERNARD PALISSY (1510-1590), creador no sólo de las “rustiques figulines” sino autor de nuevos e importantes tratados como *Recette véritable par laquelle tous les*

hommes de la Frunce pourront apprendre à multiplier leur trésors (La Rochelle, 1563) y *Discours admirable de la nature des eaux et fontaines, tant naturelles qu'artificielles, des métaux, des sels et salines, des pierres, de terres, du feu et des émaux* (París, 1580), hasta llegar también al nombre de GALILEO, que en gran parte puede relacionarse con esta corriente.

Con FILIPPO BRUNELLESCHI (1377-1445), el célebre creador de la cúpula de Santa Maria del Fiore, según parece, se encuentra por primera vez en el ambiente de los artistas, y en manera clara y enérgica, la tendencia a aplicar en su arte los conocimientos prácticos de la matemática, de la mecánica y de la óptica. A esto unía BRUNELLESCHI el estudio de los antiguos monumentos romanos que pudo observar y medir en sus permanencias en la ciudad del Tevere. BRUNELLESCHI era hombre "senza lettere", que se había criado, como casi todos los artistas del Quattrocento, en la "bottega" (taller) de un pintor o de un escultor o de un tallista. Pero pudo aprovechar la larga familiaridad con PAOLO DAL POZZO TOSCANELLI (1396-1482), el renombrado sabio, matemático, astrónomo, médico y geógrafo cuyo nombre se liga tan estrechamente con la hazaña de CRISTOFORO COLOMBO. Así, debemos a BRUNELLESCHI toda una serie de novedades, sobre las cuales no podemos aquí detenernos, pues sólo subrayaremos su fecundidad en la creación de máquinas diversas, la introducción de la perspectiva en el ambiente de los artistas, y el primer impulso dado por él a los artistas florentinos, entre los cuales debemos anotar a LORENZO GHIBERTI (c. 1378-1457), DONATELLO (1386-1466), LUCA DELLA ROBBIA (1399-1482). A GHIBERTI, el célebre creador de las puertas de bronce del baptisterio de San Giovanni, debemos en particular sus *Commentarii*. Obra de la vejez, en su mayor parte estos son un tratado de perspectiva que, no obstante sus enormes defectos e incongruencias, representan un claro síntoma de esas corrientes. A estos artistas florentinos

debemos agregar, por lo que significan para el progreso en las aplicaciones de la ingeniería, a MARIANO DA SIENA (1381-1458), apodado el TACCOLA, cuyas colecciones de dibujos técnicos son las mejores de todo el siglo XVI.

La actividad de estos hombres, que carecían todos de instrucción regular, literaria y humanística, se completó y perfeccionó tomando su rumbo característico con la obra de LEON BATTISTA ALBERTI (1407-1472), genio universal que bajo muchos aspectos hace pensar en la gran figura de LIONARDO DA VINCI. ALBERTI había gozado de una perfecta educación humanística y universitaria, pero sólo encontró su verdadera vocación en el ambiente de los artistas florentinos; y una de sus principales tareas fue la de refundir las ciencias conocidas y oficiales con las aspiraciones de los artistas y de los técnicos. Así le debemos varios tratados en lengua vulgar, entre los cuales el *De Pietura* es cronológicamente el primero y está dedicado en su redacción italiana a BRUNELLESCHI y a los cuatro artistas arriba mencionados; los *Ludi mathematici*, cuya influencia es manifiesta en los escritos de LUCA PACIOLI. Grave error de ALBERTI fue escribir en latín su *De statua*, de la cual hablaremos más adelante, y en sus últimos años su *De arte aedificatoria*. Su idea era la de escribir en latín un gran tratado que comprendiera las aplicaciones de todas las ciencias a la arquitectura, denominación bajo la cual se abarcaban entonces todas las artes —arquitectura, escultura, pintura, arte militar, hidráulica y las varias técnicas— y ser así el Vitruvius de su época. Al viejo escritor latino difícilmente se le comprendía entonces por sus expresiones técnicas, que como diremos más adelante sólo se aclararon, y de manera bastante correcta, hacia el final del Cinquecento. Pero su *De arte aedificatoria* no la podían comprender los humanistas ni los sabios oficiales, que carecían de conocimientos técnicos, mientras que los artistas y técnicos que ignoraban el latín no podían aprovechar las copiosas

enseñanzas que ALBERTI les ofrecía.

No vamos a detenernos en la historia de las aplicaciones de la ciencia a la técnica, tal como se desarrollan durante el siglo XV; hemos tratado más particularmente este punto en el tercer capítulo de nuestro *Panorama general de historia de la ciencia*, vol. III: *El Renacimiento*. Por otra parte, no debemos dejar de mencionar que LEONARDO OLSCHKI en su *Die Literatur der Technik und der angewandten Wissenschaften vom Mittelalter bis zur Renaissance*, Heidelberg, 1919, trata en manera amplia y nueva esta cuestión.

Aquí citaremos además, como interesantes escritores y al mismo tiempo artistas y técnicos, ANTONIO AVERLINO, florentino, apodado FILARETE (c. 1416 - c. 1470), con su *Trattato dell'architettura*, donde describe su imaginaria ciudad de Sforzinda; el senés FRANCESCO DI GIORGIO MARTINI (1425-1506), que en su *Trattato di architettura civile e militare* presentó un sobresaliente estudio de todo lo que concernía a la técnica militar, dando cuenta de los últimos adelantos respecto de las armas de fuego y de las fortificaciones; ARISTOTILE DE FIEROVANTI (c. 1420-1479), célebre por sus transportes de torres y fallecido en Rusia, donde en el Kremlin edificó importantes iglesias e intervino también en otros asuntos; y PIERO DELLA FRANCESCA. Para sus estrechas relaciones con LUCA PACIOLI trataremos más ampliamente de este último en el párrafo siguiente.

Como indicación bibliográfica señalaremos que el *De arte aedificatoria* de ALBERTI se publicó en 1485 en Firenze, en una época en que PACIOLI estaba escribiendo su *Summa* ("en li di proximi in Fiorença tutta fo stampata", escribe él en la primera parte, tratando de las proporciones). Los *Commentarii* de GHIBERTI fueron publicados completamente, con traducción alemana, solamente en Berlín, 1912, por J. VON SCHLOSSER. El

Trattato de FILARETE fue publicado, con traducción alemana, sólo en Wien, 1890, por VON OETTENGEN. El *Trattato* de FRANCESCO DI GIORGIO, por CARLO PROMIS, Torino, 1841, con numerosos documentos. Por lo que concierne a ARISTOTILE DE FIORAVANTI, tenemos un interesante estudio de LUCA BELTRAME.

PIERO DELLA FRANCESCA

III. PIERO DELLA FRANCESCA o DE' FRANCESCHI o PETRUS BURGENSIS nació hacia 1416 en Borgo Sansepolcro, el mismo lugar donde años más tarde vio la luz LUCA PACIOLI. Esta pequeña ciudad pertenece al norte de la Umbria, pero tenía como hoy sus relaciones más estrechas con Arezzo y entonces se ligaba también con Urbino. Después de sus primeros estudios en Perugia, en 1439, entró PIERO en Firenze en la "bottega" del pintor DOMENICO DI BARTOLOMEO, donde permaneció diez años. Aquí trabó también relaciones con los artistas y técnicos florentinos y más tarde, además, vivió de preferencia en esta ciudad, aunque muchas veces se trasladó por razones de trabajo a otras ciudades, y en particular a Urbino (donde fue familiar de FEDERICO y GUIDUBALDO DA MONTEFELTRO), Ancona, Bologna, Ferrara, Roma o permaneció algún tiempo en su ciudad natal. En sus últimos años vivió largamente en ésta, donde en particular se ocupó en escribir los tratados matemáticos que en seguida hemos de considerar. Murió en Borgo el 13 de octubre de 1492.

PIERO no sólo fue "el monarca allí tempi nostri della pictura", como dice PACIOLI en varias ocasiones, sino un verdadero y notable matemático. No debemos en este lugar ocuparnos del pintor, del cual es fácil encontrar referencias en las historias del arte. Pero sí debemos considerar su tratado *De prospectiva pingendi*, escrito en idioma vulgar entre 1470 y

1487, y su *Ubellus de quinque corporibus regularibus*, que en cierto modo forma un apéndice de la obra antes mencionada, aunque está escrito en latín. PACIOLI tradujo al italiano este *Libellus*, y su traducción constituye una parte de la *Divina Proportione*; ésta es una de las razones por las cuales tratamos aquí más largamente de PIERO DELLA FRANCESCA, además de la honda influencia que bajo todos los aspectos ejerció él sobre la actividad científica y literaria del fraile coterráneo. La habilidad de PIERO en la perspectiva de sus cuadros, en especial en los paisajes y en los dibujos anatómicos, es bien conocida. En ella influyeron sin duda sus dones artísticos y sus relaciones con el ambiente florentino. Pero no se debe olvidar la directa influencia que sobre su mentalidad ejerció ALBERTI, la larga permanencia en Urbino, que iba pasando a ser el centro italiano de la matemática, y, por fin, además de sus estudios directos, su auténtico genio matemático. Así sus obras mencionadas deben considerarse como rigurosos tratados científicos, y no como escritos de mero aficionado.

El *De prospectiva pingendi* es el primer tratado existente de perspectiva pictórica. Su primera parte considera las bases fundamentales de la perspectiva, y sus aplicaciones para dibujar en un plano (cuadro) figuras geométricas sólidas. Desarrolla el concepto del cono (con terminología moderna, de radiación) de rayos o, mejor con que van del ojo a los distintos objetos y que es cortado por el plano en cuestión, sobre el cual las intersecciones con esos rayos designan los lugares que esos objetos de tres dimensiones ocupan en su “prospectiva” en dicho plano. La segunda parte considera la proyección sobre un plano, y bajo diferentes ángulos, de los cinco cuerpos regulares; la tercera y última parte, la de los cuerpos irregulares.

Su método pedagógico es sistemático, y conduce al discípulo todavía ignorante de la materia al progresivo conocimiento y a la resolución de problemas cada vez más difíciles, utilizando la

regla y el compás. Podemos afirmar que con su tratado no sólo creó una obra para los pintores, sino que constituyó definitivamente la geometría descriptiva. Así, según nuestras actuales concepciones, este título le convendría mejor que el otro, *De prospectiva pingendi*. Como veremos, PACIOLI utiliza largamente esta obra.

PIERO, después de haber tratado en la obra mencionada los cinco cuerpos regulares, creyó conveniente profundizar más este tema en un escrito especial. Quizás la convicción de que aquí su tema era aún más estrictamente científico le aconsejó utilizar, en este caso, el latín, lo que ciertamente no contribuyó a la difusión de la obra. Mientras la primera encontró difusión bastante extensa, la segunda poco se conocía hasta su traducción a lengua vulgar hecha por PACIOLI. El hecho de que en ésta no está explícitamente citado el nombre de su autor ha conducido a crear muchos malentendidos; como veremos, se ha inculpado también a PACIOLI de plagio, bien que se deba rechazar cualquier acusación directa contra el fraile, que no sólo en todas partes ensalza a su maestro, sino que se expresa de manera tal que ninguna duda es posible.

El texto original del *Libellus* se encuentra ahora en la Biblioteca Vaticana y nunca se dio a la imprenta. Así, pues, ni una ni otra de las dos obras de PIERO fueron impresas entonces. El *Libellus* lo fue en versión italiana, en la *Divina Proportione* de PACIOLI. El de la *De prospectiva pingendi* fue publicado en dos volúmenes (texto y traducción alemana) en Strassburg, 1899, por C. WINTERBERG, quien agregó interesantes observaciones.

Una obra moderna que considera la vida de PIERO y su obra artística (con 184 reproducciones) pero no sus trabajos científicos es ROBERTO LONGHI, *Piero della Prancesca*, Roma, sin fecha.

VIDA DE LUCA PACIOLI

IV. LUCA PACIOLI o PACIUOLI, como quizás fuera mejor escribir, o LUCAS DE BURGO SANCTI SEPULCRI, como él mismo suele corrientemente designarse a la manera de los frailes, nació en esta pequeña ciudad de la Umbria, hacia 1445. Los acontecimientos de la vida de LUCA se encuentran en su mayor parte y con abundancia mencionados en sus propios escritos, de donde los tomaron sus biógrafos. Así tenemos detalladas noticias sobre su vida. Pero, naturalmente, no pudo hablarnos de su muerte; y así ignoramos su fecha. Esto nos hace pensar en lo que ocurrió también con GALENOS, el famoso médico de Pergamon, que nos ha dejado abundantísimas noticias autobiográficas, pero de quien tampoco sabemos exactamente cuándo murió (entre 199 y 201 de nuestra era).

Hasta la edad de veinte años aproximadamente LUCA no abandonó su pueblo natal, donde aprovechó la familiaridad y las enseñanzas de PIERO DELLA FRANCESCA, a quien con razón señala como a su maestro, aunque debe descartarse que PIERO ejercitara la enseñanza en una verdadera escuela. De todas maneras, los progresos de LUCA PACIOLI en matemáticas y en otras ciencias fueron lo bastante notables para que en 1464 encontrara empleo como preceptor en la familia de un adinerado mercader veneciano. Durante los seis o siete años de su permanencia en Venezia, LUCA pudo perfeccionarse en matemáticas y en aritmética comercial. Hacia 1470 o 1471 fue a

Roma, donde vivió varios meses en casa de LEON BATTISTA ALBERTI, al cual había sido recomendado por PIERO DELLA FRANCESCA.

No conocemos otros acontecimientos de la vida de LUCA hasta 1477, año en que se hizo fraile de la orden de SAN FRANCISCO. Entonces empieza su vida andariega, que lo condujo a enseñar en las más diversas escuelas y universidades italianas —una especie de cátedra ambulante de matemática—. En primer término, estuvo durante tres años en Perugia, donde enseñaba aritmética, y escribió para sus discípulos un tratado sobre este tema que nunca llegó a imprimirse y que se encuentra manuscrito en la Biblioteca Vaticana. En 1481 fue a Zara, donde escribió un tratado de álgebra, totalmente perdido. Poco después se estableció en Firenze, "fiore del mondo", donde especialmente entró en relación con gran número de artistas que allí vivían. En 1487 lo vemos nuevamente en Perugia, donde quizá hizo su traducción italiana de EUKLEIDES, tomándola del texto latino-árabe de GIOVANNI CAMPANO. Esta traducción ha desaparecido por completo. Si fuese conocida, sería la primera traducción hecha al italiano del geómetra griego; en las actuales circunstancias la primera de las existentes es la de NICCOLÒ TARTAGLIA publicada en 1543, que comprende extensos comentarios y obtuvo entonces gran éxito.

En 1489 fue nombrado profesor en la Sapienza (Roma). Fue entonces cuando se ocupó en preparar para GUIDUBALDO, duque de Urbino, modelos de los cinco cuerpos regulares y de otros. Después enseñó durante tres años en Napoli la geometría de EUKLEIDES, sin que se puedan precisar los años exactos, y estuvo además en Borgo Sansepolcro, en Urbino y en otros lugares, hasta que en 1494 lo encontramos en Venezia ocupado en la corrección de las pruebas de su obra máxima, la *Summa*. Por entonces, en 1496, LUDOVICO IL MORO lo llamó a Milano, donde conoció a LIONARDO DA VINCI, y participó en aquella

"accademia" de que habla al comienzo de la *Divina Proportione* y de la cual trataremos más adelante. Cuando cayó LUDOVICO IL MORO, LUCA volvió a Firenze junto con LIONARDO y con él vivió algún tiempo allí. Entre 1500 y 1506 enseñó matemáticas en Firenze, Pisa, Bologna y Perugia. En 1508 está de nuevo en Venezia y cuida la impresión del texto latino de EUKLEIDES, en la traducción de CAMPANO, a la cual hizo algunas modificaciones y agregados. Al año siguiente lo vemos publicando el volumen de la *Divina Proportione*, y en 1510 se encuentra de nuevo en Perugia "ad docendum abbicum". Finalmente, permaneció entre 1511 y 1513 en Borgo, de donde el papa LEONE X lo volvió a llamar de nuevo a la Sapienza de Roma. Estaba en esta ciudad al comienzo de 1514, pero desde entonces se pierden las noticias sobre él; es probable que muriera después del 30 de agosto de este año.

Una interesante biografía de LUCA, escrita menos de un siglo después de su muerte, se debe al conocido literato, historiador y matemático BERNARDINO BALDI (1553-1617). Esta *Vita*, que permanecía inédita, fue publicada por el príncipe BALDASSARRE BONCOMPAGNI en el volumen XII (1879) de su "Bullettino". No se debe confundir la *Vita* con otras noticias más breves que se encuentran en la *Crónica de matematici ovvero Epitome dell'istoria delle vite loro* (Urbino, 1707) del mismo autor.

LA OBRA LITERARIA DE LUCA PACIOLI

V. Como puede verse por el breve esquema que hemos dado de su vida, LUCA pertenecía a la clase de los maestros que actuaban en las escuelas de matemáticas, y estaba perfectamente enterado de lo que en ellas se enseñaba. Al mismo tiempo su gran familiaridad con los artistas, que también más adelante hemos de subrayar, y en particular sus estrechas relaciones con PIERO DELLA FRANCESCA, le habían hecho conocer extensamente los esfuerzos de los artistas y técnicos en la aplicación de la ciencia a su arte. Además LUCA sentía verdadera vocación por la enseñanza y la difusión de las matemáticas pura y aplicada. Con semejante formación, se explica la actividad de LUCA y el éxito de sus obras, que sin contribuir con nada de verdaderamente nuevo a la ciencia ejercieron hondo influjo sobre sus contemporáneos y sobre la generación siguiente. Además, las obras de LUCA parecen como reproducir sus lecciones orales y abundan en digresiones, anécdotas, recuerdos personales, etc., etc., lo que para sus lectores de entonces, y también para nosotros, resulta del más grande interés.

Por otra parte, es admirable el entusiasmo con que PACIOLI considera las matemáticas como la base de todas las ciencias y de todo saber. Él quiere que sus discípulos no sólo aprendan las reglas y las operaciones que sirven en la práctica, sino también las demás partes teóricas, y se den perfecta cuenta de sus razones. En esto se distingue LUCA de los demás tratadistas de

esas ciencias y señala un verdadero progreso, que alcanzó influencia. Téngase presente que por más de medio siglo las obras de LUCA PACIOLI fueron la fuente a que recurrieron todos los matemáticos italianos y también muchos extranjeros.

En los párrafos siguientes damos una descripción formal de la *Summa* y de la *Divina Proportione*, al mismo tiempo sin olvidar algunas observaciones generales entraremos en un examen crítico de estos escritos, de su éxito y de la estima en que se les tuvo durante el siglo XVI. Pues creemos que una exposición bastante amplia del contenido de la *Summa* será verdaderamente provechosa para los lectores de la *Divina Proportione*.

LA *SUMMA*

VI. La *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita* como se ha dicho, fue impresa en 1494 en Venezia, en la imprenta de PAGANINO DE PAGANINI. Una segunda edición sin variaciones apareció muchos años después de la muerte del autor, en Tosculano sul Lago di Garda, 1533.

La obra está dedicada a GUIDUBALDO DA MONTEFELTRO, duque de Urbino; el autor, al comienzo, en la dedicatoria a GUIDUBALDO, afirma que se sirve de la lengua vulgar para que todos puedan comprender su obra y sea así de mayor utilidad. En seguida trata de la influencia que sobre él ejercieron los artistas y técnicos, haciendo así una interesante historia de la matemática aplicada y contemporánea. Es interesante subrayar que además de ALBERTI y de PIERO DELLA FRANCESCA, entre los artistas que en este sentido tuvieron influencia sobre él, LUCA menciona a los siguientes: GENTILE y GIOVANNI BELLINI en Venezia y por el dibujo en perspectiva GIROLAMO MALATINI; en Firenze ALESSANDRO BOTTICELLI, FILIPPO y DOMENICO GHIRLANDAIO, ANDREA DEL VERROCCHIO, ANTONIO DEL POLLAIUOLO, GIULIANO y BENEDETTO DA MAIANO; en Perugia, PIETRO PERUGINO; en Cortona, LUCA SIGNORELLI, discípulo de PIERO DELLA FRANCESCA; en Padova, ANDREA MANTEGNA; en Forlí, MELOZZO y MARCO PARMIGIANO. Estos maestros, dice, llegan a una maravillosa perfección calculando sus obras con el nivel y el compás. Después ensalza LUCA la importancia de la

matemática para todos los artes y ciencias, para la música, la cosmografía, la preparación de mapas, para el comercio y para todas las "artes mecánicas". Recuerda después las artes militares, en las cuales sobresalió en la antigüedad ARCHIMEDES y en los tiempos modernos FEDERIGO DA MONTEFELTRO, el predecesor de GUIDUBALDO. Termina enumerando otras ciencias, como las naturales, la medicina, la alquimia y la filosofía, que reciben todas gran provecho de las matemáticas. Este proemio merece verdaderamente una atenta lectura.

La *Summa* comprende cinco "parti principali"; la primera y la más importante y extensa se ocupa de aritmética y álgebra, la segunda de la aplicación de ambas a la práctica comercial, la tercera de teneduría de libros, la cuarta de los distintos sistemas monetarios entonces en uso en Italia. La quinta parte, que forma casi un tratado por sí mismo y cuyas páginas están numeradas separadamente, considera la geometría pura y aplicada. Cada parte está dividida en "distintioni", estos en "trattati", y estos últimos, en la primera parte, están además divididos en "articoli", y en la última en "capitoli". Antes de especificar los varios temas, recordaremos que los autores que LUCA cita como fuentes suyas en las diferentes partes de la *Summa*, además de EUKLEIDES, PTOLOMEIOS, LEONARDO PISANO y PIERO DELLA FRANCESCA son principalmente BOETIUS (c. 480-542), JORDANUS NEMORARIUS (s. XIII), BIAGIO PELACANI (m. 1416), SACROBOSCO (JOHN HOLYWOOD), PROSDOCIMO DE BELDOMANDI (nacido en 1370 o 1380-1428), ALBERTUCCIO (ALBERTO DE SAXONIA), REGIOMONTANO (JOHANNES MÜLLER, 1436-1476).

Diré ahora algo sobre la lengua y el estilo de LUCA PACIOLI. Hemos ya anotado que para dar mayor difusión a sus enseñanzas y para ser comprendido por los artistas y técnicos, que particularmente le interesaban, LUCA se sirvió constantemente, en sus escritos, de la lengua vulgar. Pero no

sólo entonces la prosa científica italiana no había alcanzado una forma fija y adecuada —la alcanzará, puede decirse, con GALILEO—, sino que la lengua empleada por el fraile de Borgo San Sepolcro es un italiano bárbaro, que carece de gramática y de sintaxis, que mezcla al habla toscana formas dialectales diferentes, abunda en latinismos y grecismos, e intercala en el italiano palabras y frases latinas. Su biógrafo y admirador BERNARDINO BALDI no puede menos de declarar, en este sentido, que "il suo dire è di manera bárbaro, irregulato, rozzo et infelice che rende nausea a quelli que leggano le cose sue". Y el elegante escritor ANNIBAL CARO, que puso en versos libres italianos los armoniosos hexámetros de la *Eneida* de VERGILIUS, compara los escritos de LUCA con los "ceneracci" de los orfebres. Reconoce así que, como en las cenizas de éstos, estaban escondidas en sus escritos las pepitas de oro. Esto lo reconoce también el sobresaliente matemático FEDERIGO COMMANDINO (1508 - 1565), benemérito traductor al latín y al italiano de gran número de matemáticos griegos. Hacia el término de su vida él se había propuesto volver a editar la *Summa* de PACIOLI, corrigiendo su estilo. Había ya conseguido realizar una gran parte de esta tarea cuando la muerte le impidió llevarla a término.

LA PARTE ARITMÉTICA DE LA *SUMMA*

VII. Con el primer tratado de la primera *distintione*, LUCA, a diferencia de las aritméticas contemporáneas, algunas de las cuales mencionaremos luego, empieza en forma científica con una teoría de las cantidades, para pasar pronto a considerar las diferentes especies de números y perderse en consideraciones de carácter místico.

Considera así los números perfectos (en el sentido de EUKLEIDES) e imperfectos, comparando los primeros con hombres bien proporcionados y los últimos con hombres deformes. Claro que en este caso, como en tantos otros, a nuestro fraile lo extravía el doble significado de ciertas palabras. Además el número 6, el primero de los perfectos, manifiesta su naturaleza por el hecho de que Dios creó el mundo en seis días, y en el último creó al hombre como a la criatura más perfecta.

Puede ofrecer interés el considerar las propiedades que PACIOLI atribuye a los diversos números; reconocemos aquí ideas neopitagóricas, neoplatónicas y también rasgos característicos del Renacimiento.

El número 5, por ejemplo, nos conduce a los cinco cuerpos regulares, que, según PLATÓN, “archimandrita de li phylosophanti”, y muchos humanistas, constituían los elementos básicos de la totalidad del mundo, y que por otra parte interesaban tanto a los matemáticos. Deberemos volver sobre esta cuestión, fundamental para valorar los méritos de

PACIOLI y las características del Renacimiento, de los escritores científicos de entonces, de los artistas y de PIERO DELLA FRANCESCA, y hasta del misticismo constructivo de un gran astrónomo: JOHANNES KEPLER.

El número 7 gozó, desde la antigüedad, de singulares prerrogativas, y encontramos ya entre los tratados de los hipocráticos un interesante escrito dedicado a este asunto. Es natural que PACIOLI se ocupe con complacencia de esta cuestión. En particular emplea largo espacio para considerar sus relaciones con fenómenos ginecológicos y fisiológicos. Sobre esta cuestión expone casi todo lo que por entonces se decía.

Después de esta parte, eminentemente mística, pasa a considerar desde un punto de vista más estrictamente matemático la naturaleza de los números, como los números perfectos, los cuadrados (*numen congrui*), etc. Considera también los sistemas de numeración decimal, que LUCA atribuye a los árabes, y la *loquela digitarum* evidentemente derivada de las obras del venerable BEDA (c. 673-735).

Con la segunda *distintione*, LUCA pasa a tratar de las diferentes operaciones aritméticas. Es aquí donde aparece su enorme superioridad, desde todo punto de vista, sobre los pobres y deficientes tratados de aritmética en lengua vulgar que se habían impreso en la segunda mitad del siglo XV para el uso del gran público.

El primero de estos tratados fue el “de Treviso”, impreso en esa ciudad, sin nombre de autor, en 1478. En sus sesenta y dos páginas, se expone la resolución de las cuatro operaciones, se explican los cálculos numéricos empleados en los comercios y se enseña a determinar la fecha de Pascua. Es un simple tratado práctico que no tiene nada de científico y no llega a tratar cuestiones superiores. No mucho mejor es una “aritmética de Bamberg”, impresa en 1483 (de una anterior de 1482 no

quedan sino fragmentos), que desarrolla algo más la parte aritmética, pero no considera el cálculo de la fecha de Pascua. Tampoco es muy superior, aunque sí algo más desarrollada, otro "Rechenbuch" publicado en 1489 por JOHANN WIDMANN. Lo que encontramos en él de singular es que aquí aparecen por primera vez los signos + y − para indicar la adición y la sustracción. El más extenso de estos pobres tratados es el que lleva este título: *Qui comenza, la nobel opera de arithmethica ne la cual se tracta tute cosse a mercantia pertinente facta e compilata p. Pietro Borgi* (o BORGHI) *de Vienesia*; se publicó en 1484 y obtuvo en menos de un siglo dieciséis ediciones.

El mejor de estos tratados hubiera sido *Le triparty en la Science des nombres*, de cierto NICOLAS CHUQUET, al cual se agrega, en el manuscrito existente en París, una serie de 166 "cuestiones", que probablemente constituía una continuación de las tres partes de la obra mencionada. Esta obra contiene, en algunas partes, progresos en dirección al álgebra simbólica, que pueden considerarse superiores a los alcanzados por LUCA PACIOLI. Pero no ejerció influencia alguna, y sólo fue publicada en el último siglo (1880) como curiosidad histórica.

Podemos decir, pues, que LUCA, si no es descubridor de nuevas teorías y de nuevos métodos, manifiesta notable originalidad en buscar y ordenar los temas que constituyen la parte aritmética de la *Summa*.

La segunda *distintione* trata, como hemos dicho, de las operaciones con números enteros (*sani*). LUCA no considera, según muchos habían hecho antes de él, como operaciones distintas la duplicación y la dimidiación. De todas estas operaciones expone los diferentes métodos entonces conocidos y se detiene en explicar filológicamente las diversas denominaciones que habían recibido. Expone también las diferentes pruebas por 7 y por 9.

Pasa a tratar después de las progresiones aritméticas y geométricas y muestra cómo se puede hacer la suma de un número dado de términos de ellas. Considera también la serie 1, 2, 3, 4… y las que se obtienen elevando sus términos al cuadrado o al cubo.

Encontramos en seguida toda una serie de problemas que son interesantes para conocer lo que entonces se consideraba en las escuelas y para apreciar también la mentalidad de LUCA. Muchos de estos problemas consideran cuestiones de viajes y de viajeros que saliendo de diversas ciudades llegan o se encuentran en momentos o localidades diferentes. Otras son fantásticas o humorísticas, por ejemplo, la de las dos hormigas, colocadas a cierta distancia una de otra, que avanzan cierto trecho de día y retroceden de noche otro trecho. Se trata de calcular cuándo se encontrarán las hormigas. Otra habla de la rata que se encuentra sobre un árbol que está creciendo, y que sube y baja según diferentes cantidades; lo mismo hace un gato que se encontraba al pie del árbol; ¿cuándo alcanzará el gato a atrapar a la rata?

Finalmente una cuarta *distintione* trata de las fracciones (*numeri rotti*) y de las operaciones que con ellas se hacen. Después de indicar sus partes como *numerator* y *denominator*, y anotar que éstos se ponen uno sobre otro separándolos con una regla, pasa a examinar cómo se pueden simplificar, y enseña a buscar el máximo común divisor ("schisatore"). En este lugar es interesante anotar cómo LUCA advierte que él tiene por costumbre empezar a enseñar a sus discípulos los métodos más difíciles, para pasar en seguida a exponer los más fáciles y prácticos. Esto muestra una vez más la importancia que él atribuía a lo teórico, mientras afirma que "non meruit dulcía qui non praegustavit amara".

Además LUCA considera las fracciones continuas ascendentes y da las reglas para escribir de esta manera las fracciones

ordinarias.

Es extraño encontrar que LUCA emplea un largo espacio para conciliar el dicho bíblico de “creced y multiplicaos” con el hecho de que, multiplicando entre sí las fracciones, el producto que se obtiene es menor que los multiplicandos. También aquí LUCA se deja llevar en sus razonamientos por el sonido de las palabras. Pero no se debe creer que nuestro fraile encontrara personalmente dificultades en este sentido, sino que el suyo era un método didáctico para hacer superar a sus discípulos una aparente contradicción.

En la quinta *distintione* LUCA aborda algunos problemas de aritmética comercial. Volveremos luego sobre algunas de estas cuestiones.

LA TEORÍA DE LAS PROPORCIONES

VIII. Con la sexta *distintione*, LUCA PACIOLI empieza a tratar un tema de la más alta importancia para el Renacimiento, no sólo en lo que concierne a la matemática sino en lo relativo a todas las ciencias y al concepto total del universo: la teoría de las proporciones, que rige a todas las cosas y se manifiesta en la *armonía* de todos los fenómenos. Esta concepción constituye también la base que anima la *Divina Proportione* de PACIOLI, y por esta razón conviene aquí que nos detengamos un poco sobre lo que él nos dice en esta parte de la *Summa*.

Empieza LUCA enumerando los autores que han tratado esta cuestión, y cita textualmente gran parte de lo que sobre ella escribieron. De los antiguos, además de EUKLEIDES y BOETIUS, ensalza, como veremos, especialmente a PLATÓN y sólo de modo muy secundario a ARISTÓTELES. Menciona también a ARCHIMEDES. De los árabes recuerda TÂBIT b. QURRA (826-901) y "HAMETO" (es decir uno de los BANU MÛSÂ). De los escritores medievales, a ALBERTO DE SAXONIA (ALBERTUCCIO) (m. 1390), THOMAS BRADWARDIN (1290-1347), BIAGIO PELACANI (m. 1416), y JORDANUS NEMORARIUS. A este último se le consideraba por entonces como autor único de varias obras que se conocían bajo este nombre; no me detengo aquí a distinguir los varios personajes y a tratar de identificarlos, para lo cual remito al segundo volumen de mi citado *Panorama*.

Por distintas razones estas últimas citas de LUCA son muy

importantes. Una de ellas es que los cuatro escritores medievales son los que constituyen la base sobre la cual LIONARDO obtuvo seguramente de LUCA la indicación de estos autores, como lo demuestra el hecho de que él los cita de la misma manera que LUCA y sólo después de haber conocido al fraile en Milano, en la corte de LUDOVICO IL MORO. En particular ALBERTUCCIO, cuya obra sobre las proporciones, como escribe LUCA, era entonces muy leída en las escuelas italianas y que pertenecía a la misma orden de los franciscanos, es el autor de aquel *Tractatus proportionum*, cuya segunda parte, *Tractatus de proportione velocitatum in motibus*, constituye el punto de partida de la dinámica de LIONARDO. Adviértase que es la primera vez que estos matemáticos y físicos se encuentran mencionados en una obra vulgar.

Los escritores últimamente mencionados habían tratado las proporciones desde un punto de vista exclusivamente matemático; pero es con PLATÓN, en donde las proporciones tienen un significado más general y filosófico, con quien se liga especialmente LUCA. El filósofo griego en el *Timeo*, la *República* y las *Leyes* consideraba las proporciones desde un punto de vista especulativo y estético, como principio universal, y en este sentido sus ideas habían sido aceptadas y ampliadas por los humanistas, en particular por los de la Accademia Platónica de Firenze. Pero no sólo por ellos: las proporciones y la armonía como principio metafísico se encuentran en la *Coincidentia oppositorum* de NICOLAUS DE CUSA (1401-1464), en la *Concinnitas* de LEON BATTISTA ALBERTI, y, a través de PACIOLI y todos los hombres del Renacimiento, en JOHANNES KEPLER desde su *Mysterium Cosmographicum* (1596) hasta su *Marmonice mundi* (1619).

Después de afirmar que los antiguos filósofos que había mencionado sabían perfectamente que ninguna cosa se puede conocer en la naturaleza sin la proporción y que el objeto de

todos los estudios consiste en buscar las relaciones de una cosa con la otra, LUCA pasa a especificar de manera más particular dónde se encuentran estas relaciones.

Empieza por las que existen entre culpa y pena, lo que DANTE había ya conseguido expresar en su *Inferno* con su "contrapasso". Muestra en seguida la importancia de la proporción en la medicina, dando las razones entre enfermedad y medicamento o entre nutrición y consumo de fuerza. En esta parte se refiere especialmente a HIPPOKRATES, GALENOS y AVICENNA. Considera las proporciones en la mecánica, especialmente en la parte práctica, por ejemplo entre la violencia de los proyectiles y la resistencia de las fortificaciones, tema que ya había desarrollado FRANCESCO DI GIORGIO en la corte de Urbino, donde LUCA había formado tantas de sus características mentales. Se refiere después muy extensamente al arte, donde la proporción es "madre y reina". La perspectiva lineal y la mezcla conveniente de los colores permiten al pintor representar convenientemente el cuerpo humano. En este punto recuerda con gran elogio a PIERO DELLA FRANCESCA, autor de una perspectiva "que él tiene completamente leída y cuidadosamente estudiada". Tratando en seguida de la arquitectura, donde se han aplicado a los edificios las proporciones del cuerpo humano —véase a este propósito la segunda parte de la *Divina Proportione*—, cita largamente a LEON BATTISTA ALBERTI, cuyo tratado de arquitectura "nelli di proximi a Fiorença tutta fo stampata". La iglesia de San Lorenzo en Firenze, obra de FILIPPO BRUNELLESCHI, es para él el ejemplar más perfecto de un monumento arquitectónico moderno bien proporcionado. Pasa después a tratar de las proporciones en el arte militar, cuestión que también había tratado matemáticamente el mencionado FRANCESCO DI GIOGIO. Vuelve a considerar a PLATÓN y trata varias otras cuestiones, no sin subrayar que las proporciones deben establecerse entre objetos análogos, observación

importante en una época en la cual era frecuente establecer relaciones entre cosas dispares.

En la séptima *distintione*, después de tratar, primero prácticamente y después en forma teórica, las reglas de la falsa posición, “que con palabras árabes se denomina el cataym”, recapitula una vez más sus largas consideraciones sobre las proporciones, que evidentemente constituyen para él un tema predilecto.

LA PARTE ALGÉBRICA DE LA *SUMMA*

IX. Con la octava *distintione*, empieza LUCA a tratar por primera vez en lengua vulgar del álgebra: "Gionti con l'ajuto de dio al luogo molto desiderato cioe a la madre de tutti li casi detta dal vulgo la regola della cosa over Arte magiore cioe pratica speculativa, altramente chiamata Algebra et almucabala in lingua arabica over caldea secondo alcuni che in la nostra sona quanto che a dire restaurationis et oppositionis. Algebra id est Restauratio. Almucabala id est oppositio". Así, después de considerar las diferentes operaciones con los polinomios —empleo la terminología moderna para mayor claridad— entre las cuales era entonces particularmente dificultosa, por la falta de signos simbólicos, aquella en que aparecían radicales, empieza a tratar de la parte más importante, es decir, de las ecuaciones.

Como se usaba entonces, denomina "*cosa*" la incógnita y considera sus potencias hasta la 27.ª. Para las primeras adopta los nombres y las abreviaciones siguientes: *cosa* = co; *censo* = ce; *cubo* = cu; *censo de censo* = ce ce; *primo relato* = p.º r.º; *censo de relato* = 2.º; *censo de censo de censo* = ce ce ce. Veremos estos términos frecuentemente empleados en la *Divina Proportione*, especialmente en la traducción del *Libellus*. Además, LUCA emplea las letras *p* y *m* para indicar *plus y minus*; R^2 y R^3, con la R cruzada por una línea oblicua, significan raíces cuadradas y cúbicas. A los números negativos hace preceder una *m* "pero che

chiaro è che *m* 4 è manco che nulla".

En todas sus exposiciones sigue principalmente a Leonardo de Pisa. Sin detenernos a considerar sistemáticamente esta *distintione*, anotaremos, empleando los símbolos modernos, algunos de los principales temas que él trata.

Sus ecuaciones de segundo grado son las de los tipos ordinarios siguientes: $x^2 + a\,x = b$; $x^2 = a\,x + b$; $x^2 + b = a\,x$, donde *a* y *b* son números positivos. Las reglas de resolución están expresadas con tres cuartetos latinos. LUCA considera también ecuaciones de grado superior, algunas reducibles a un grado inferior, y otras que declara *imposibles*. Pero parece que para PACIOLI esta imposibilidad es sólo relativa y temporaria, porque encontramos en él la resolución de una ecuación de cuarto grado, es decir, de la siguiente: $\frac{x(ax+1)}{2} + \left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2 = 20.400$ que reduce $ax^4 + 2x^3$ que reduce a $x^4 + 2x^3 + 3\,x^2 + 2x = 81.600$ que, observa, equivale a $(x^2 + x + 1)^2 = 81.600$, de ahí, extrayendo la raíz cuadrada, se llega a una ecuación de segundo grado. El primer término del primer miembro representa la suma de la serie de $1 + 2\ldots + x$, mientras el segundo término es la de la serie $1^2 + 2^2 + \ldots + x^2$. Claro es que LUCA había ya preparado el resultado, porque sólo en casos particulares esta ecuación es resoluble con números racionales y enteros.

Notamos además que encontramos en la *Summa*, en la parte comercial, una ecuación exponencial $2^X\,x = 30$ que él resuelve por tentativas. Finalmente es de notar que buscando el plazo a cuyo término llega a duplicarse un capital puesto a un interés de *r* %, llega al resultado $x = \frac{72}{r}$. Para apreciar su aproximación, obsérvese que actualmente la fórmula se obtiene de la ecuación exponencial $\left(1 + \frac{r}{100}\right)^\infty = 2$ donde se deduce $x = \log_e 2 : \log_e$

$\left(1+\frac{r}{100}\right)$ y aproximadamente $x=\frac{100}{r}log_e 2$. Ahora bien, siendo $\log_e 2$ = 0,69314… se ve que PACIOLI ha llegado a una aproximación bastante conforme a la realidad.

LA PARTE GEOMÉTRICA DE LA *SUMMA*

X. No nos demoraremos aquí en exponer particularmente las partes segunda, tercera y cuarta de la *Summa*, que, como hemos dicho, tratan de aritmética comercial y teneduría de libros, monedas, etc., etc. Estas partes constituyen una verdadera mina de noticias sobre usos, costumbres, etc., de la época. Pero aquí, desde el punto de vista del desarrollo de la ciencia, poco nos interesan, y sólo anotaremos que en ellas se encuentra una extensa exposición de la "partida doble" en la teneduría de libros.

Por el contrario debemos considerar, siquiera brevemente, la quinta parte, dedicada a la geometría, que también constituye el primer tratado sobre este tema escrito en lengua vulgar. Claro es que la cuestión había sido ya desarrollada sistemáticamente; así, en su ordenación LUCA es mucho menos original que en la parte aritmética, y sigue generalmente las huellas de EUKLEIDES y de LEONARDO DE PISA. Además, como en la *Divina Proportione*, no repite las demostraciones de los teoremas; se limita a remitir a sus fuentes. Recordemos que de EUKLEIDES había ya vertido al italiano la traducción latina que del árabe había hecho GIOVANNI CAMPANO DE NOVARA, capellán del papa URBANO IV (1261-1281). Recordemos también que esta versión de Campano y sus comentarios, cuya primera edición es del año 1482, fueron publicados en 1509, en su texto latino algo modificado, por el mismo PACIOLI.

Dicha parte geométrica está dividida en otro *distintioni*, “a reverenda de le octo beatitudine”, que consideran los temas siguientes:

I. De los triángulos y de los cuadriláteros.

II. De un problema especial que se puede proponer en el triángulo.

III. De las superficies de varios polígonos y de la resolución algébrica de los problemas relativos.

IV. Teoría del círculo según EUKLEIDES; cálculo de *n* según ARCHIMEDES por el método de los polígonos inscriptos y circunscriptos; construcción de una tabla de cuerdas según PTOLEMAIOS; medida de las superficies de las montañas.

V. De la división de las figuras planas, siguiendo en esto a LEONARDO DE PISA.

VI. Cálculo de volúmenes de figuras sólidas, en particular de los cuerpos regulares.

VII. De algunos instrumentos de medida, y de varias medidas prácticas.

VIII. Esta *distintione* viene a ser una especie de apéndice bajo el título de *Particularis tractatus circa corpora regularia et ordinaria*, donde además de nuevas consideraciones sobre los cuerpos regulares se encuentra la resolución, a menudo original, de cien problemas geométricos. Esta parte recuerda los *Ludi mathematici* de LEON BATTISTA ALBERTI; entre otros encontramos los problemas siguientes: *a)* conociendo los lados de un triángulo y su área determinar su tercer lado; *b*) determinar un rectángulo conociendo su área y la diferencia de los lados; *c*) determinar los radios de

los círculos inscritos y circunscritos a un triángulo; *d*) inscribir un cubo en una semiesfera. LUCA encuentra acertadamente que el cubo de lado $d\sqrt{6}$, donde *d* es el diámetro de la esfera, es una solución del problema, pero no afirma que sea la única. Etc., etc.

GENERALIDADES SOBRE *LA DIVINA PROPORTIONE* – LA "ACADEMIA LEONARDI VINCI"

XI. La *Summa* había sido escrita como obra orgánica que debía exponer de manera enciclopédica, sistemática y agradable el conjunto de las ciencias matemáticas puras y aplicadas, tal como se encontraban entonces. El volumen de la *Divina Proportione*, según se publicó en 1509, es una obra mixta, escrita en tiempos diferentes y con intenciones distintas, bien que concuerden en su inspiración fundamental. Además, sus dimensiones totales son mucho menores que las de la *Summa*. Sin embargo, desde determinados puntos de vista, el interés que ofrece es quizá mayor que el de la otra obra, especialmente para los artistas y los historiadores generales de la cultura. Por otra parte, LUCA, en esta obra, se extiende más sobre las concepciones místicas, platónicas y pitagóricas que, surgiendo a nueva vida, constituían una característica del Renacimiento. El lector, frente a esta traducción castellana de la *Divina Proportione*, no tiene necesidad de que le demos un resumen detallado de la obra. Interesará principalmente anotar el origen de sus diferentes partes, y tal cual consideración genérica sobre ellas.

Empezaremos por examinar separadamente su primera parte, a la cual corresponde con mayor precisión el título de *Divina proportione*, y que fue escrita muchos años antes que las

restantes.

Cuando LUCA estaba en Venezia cuidando la publicación de la *Summa*, fue invitado por LUDOVICO IL MORO a trasladarse a Milano para dar cursos de matemática y participar en la Academia que reunía a muchos cortesanos y algunos doctos en la corte ducal. El primer capítulo de la primera parte de la *Divina Proportione*, dedicado al "excellentissimo principi LUDOVICO MARIAE SFORCIAE Mediolanensium Duci", nos proporciona la nómina de estos personajes. Además del señor GALEAZZO DA SANSEVERINO, "esforzadísimo general de Vuestra Ducal Alteza", cuyo nombre damos aquí por una razón que veremos más adelante, encontramos los de diversos prelados y funcionarios del ducado milanés y otros de médicos y sabios, y de profesores de la universidad de Pavia, más o menos ilustres. Sobre todos descuella el nombre prestigioso de LIONARDO DA VINCI, que LUCA menciona con elogios abundantes y merecidos, y que desde hacía ya muchos años estaba al servicio del DUQUE DE MILANO.

Estas "academias" no tienen nada de común con las organizaciones regulares que surgieron un siglo después y que, como la Accademia dei Lincei romana o la del Cimento florentina, inauguran las gloriosas compañías que dieron impulso tan grande al desarrollo científico y cuyas descendientes son las famosas "Académie des Sciences" parisiense; la "Royal Society" londinense (y la "Accademia naturae curiosorum" alemana). Tampoco tienen que ver con las Academias creadas para vulgarizar las ciencias y promover el uso del vulgar, como la "Academia fiorentina", cuya alma fueron ANTON FRANCESCO GRAZZINI, PIER FRANCESCO GIAMBULLARI, JACOPO GELLI, BENEDETTO VARCHI, y otros conocidos literatos toscanos, o las que tenían sus propósitos en el campo de la enseñanza técnica, como la celebrada "Accademia del Disegno" también florentina, fundada por GIORGIO VASARI y otros notables personajes,

academia cuyo nombre es principal y ampliamente conocido por los artistas, pero que tiene importancia también para las ciencias, en particular la matemática. Las academias renacentistas constituían reuniones libres que se celebraban en los palacios de los príncipes y que generalmente se designaban con el nombre del más ilustre de sus participantes. Así la de Firenze se conocía con el de MARCILIO FICINO, la de Napoli con el de GIOVIANO PONTANO, la de Roma con el de POMPONIO LETO, la de Venezia con el de ALDO MANUZIO, la de Cosenza con el de BERNARDINO TELESIO, etc.; nada de extraño había así en que la de Milano, de la cual nos habla LUCA PACIOLI, pudiera tomar el de LIONARDO DA VINCI. Creemos que interpretando de esta manera una cuestión muy discutida se le da su lógica y definitiva solución. LIONARDO DA VINCI, "cuyo nombre es reconocido en todas sus obras de escultura, fundición y pintura", era sin duda la figura de más prestigio y el mayor ornamento de esta Accademia milanesa. Tal hipótesis y la información que PACIOLI nos proporciona nos llevan a hacer una digresión que creemos en verdad importante. Ha sido LEONARDO OLSCHKI, en un volumen que ya anteriormente hemos mencionado, quien ha puesto en claro el hecho que vamos a exponer.

LIONARDO DA VINCI nos ha dejado en el Castello Sforzesco siete conocidos y maravillosos frescos; ramas entrelazadas rodean en ellos esta inscripción: "Academia Leonardi Vinci". Se ha discutido mucho acerca del significado de esta inscripción, y muchas opiniones erróneas y variadas se han emitido al respecto. Según una de ellas, la inscripción aludiría, por ejemplo, a una escuela privada del propio LIONARDO; no se ha tenido en cuenta que en aquella época era en la "bottega" del artista donde éste formaba a sus discípulos. En cambio, si, como hemos dicho, en varias cortes italianas se llevaban a cabo por entonces reuniones del tipo de las descritas por PACIOLI al comienzo de la *Divina*

Proportione, debemos perdonar a LIONARDO DA VINCI el que, al pintar sus célebres frescos de la "Sala delle Asse", tuviera la pequeña vanidad de escribir, como título de la "academia", su propio nombre, que ciertamente superaba en fama a los demás.

EL CÓDICE DE LA *DIVINA PROPORTIONE* OFRECIDO A LUDOVICO IL MORO

XII. El tratado que LUCA PACIOLI escribió sobre la *Divina Proportione*, y que terminó el 14 de diciembre de 1498 se encuentra ahora, en su primer ejemplar magníficamente escrito e ilustrado, en la Bibliothèque Publique de Genève. En esta edición reproducimos algunos folios y algunas figuras de este códice. Su texto se encuentra reproducido, con variaciones casi insignificantes, en la edición impresa en 1509; mayor variación, por lo contrario, se encuentra en el orden de las figuras prospécticas de los poliedros, y en su ejecución, como diremos luego.

En cuanto al texto, que puede leerse en la traducción publicada en este volumen, notaremos que en los primeros cuatro capítulos habla, como hemos dicho, de las reuniones milanesas, y dedica el libro al Duque; trata después ampliamente de la importancia fundamental y universal de la matemática; dice que a las cuatro disciplinas matemáticas fundamentales entonces reconocidas, aritmética, geometría, astronomía y música, debe agregarse la perspectiva, o suprimirse la música, por la mayor importancia que tiene la vista comparada con el oído, y pasa a adelantar algunas generalidades sobre su tratado.

En los capítulos 5-23 considera la división de una línea en media y extrema razón, lo que hoy denominamos sección áurea

y que él llama *divina proporción*, por sus propiedades "que corresponden, por semejanza, a Dios mismo". Enumera estas propiedades, pero sólo describe con amplitud las primeras trece, "por reverencia de nuestra salvación, y en honor del cuerpo de doce y de su santísimo jefe, Nuestro Redentor JESUCRISTO".

La *Divina Proportione* o sección áurea entre desde luego entre los factores para la construcción del pentágono, y en consecuencia de los cuerpos regulares, pero es a éstos y a sus cuerpos dependientes a los que dirige PACIOLI, en esta obra, toda su atención. Ya en la *Summa* había considerado la medición de estos cuerpos; en el presente tratado se ocupa especialmente de su construcción y formación. Así en los capítulos 24-31 habla de los cinco cuerpos regulares, y de la imposibilidad de que haya otros. En los capítulos 32-47 de la proporción mutua de todas sus superficies y de la inclusión de los cinco cuerpos unos en otros. Pero como cada uno no los acoge todos, no hay veinte sino sólo doce inclusiones posibles. "En cambio el dodecaedro, por estar dotado, entre los otros, de singular prerrogativa, a ninguno ha prohibido o vedado alojamiento, y es receptáculo de todos." Por esto el viejo PLATÓN lo hacía corresponder al Universo, junto con los otros cuatro cuerpos que hemos indicado y que representaban respectivamente la tierra, el agua, el aire y el fuego.

En los capítulos 48-55 trata de los cuerpos dependientes de los regulares, que se obtienen despuntando sus ángulos o cortando sus lados. Estas formas, dice nuestro fraile, pueden desarrollarse al infinito. Pasa en los capítulos 56-57 a tratar del cuerpo esférico y de cómo se pueden colocar en ellos los cuerpos regulares. Trata después en los capítulos 58-69 de los cuerpos oblongos, es decir, más largos o altos que anchos, considerando particularmente las columnas y las pirámides, es decir, cilindros y prismas, conos y pirámides. En los últimos dos capítulos, 70-71, explica cómo en el tratado se deben encontrar los dibujos

agregados de estos cuerpos y cómo se deben entender algunos vocablos, y termina ofreciendo al Duque modelos de esos mismos cuerpos.

En el verso de la última hoja donde se encuentra el texto y antes que empiecen las figuras de los poliedros se lee lo que sigue:

Corpora ad lectorem
El dolci fructo vagho e si dilecto
Constrinse già phylosophi cercare
Causa de noi: che pasci lintellecto
Disticon
Querere de nobis fructus dulcissimus (eget)
Philosophus (cau)sam mens leta manet.

Ahora bien, en el manuscrito M de Lionardo, folio 80, se lee el mismo terceto con variaciones insignificantes.

El dolce fructo vagho essidiletto
Costrinse già i filosofi cercare
Causa di noi per pasciere lontelletto.

Debajo de ellos se encuentran pequeños dibujos de los cinco cuerpos regulares. Se advierte que otros dibujos relacionados se encuentran en el mismo manuscrito. Es verosímil que éstos fueran hechos en la época de la primera permanencia de LIONARDO en Milano y no en 1515 como algunos han supuesto atribuyendo esta fecha al ms. M. Se plantea así la cuestión de saber si el autor del terceto fue también el mismo LIONARDO, como es probable.

Una cuestión mucho más importante de esta primera colaboración de LIONARDO es la de saber si los dibujos del Codice Sforzesco son de la misma mano de LIONARDO. Que LIONARDO hizo las figuras para PACIOLI y a su ruego, es indudable, no sólo por lo que encontramos escrito en esta parte de la *Divina Proportione* (véase el capítulo), sino también por lo que leemos en el capítulo X de la segunda parte del volumen

impreso en 1509, y por lo que se lee en la dedicatoria de dicho volumen a PIER SODERINI; "Schemata quoque sua VINCI nostri LIONARDI manibus scalpta quod opticem instructionem reddere possent," y por lo que nos dice explícitamente PACIOLI mismo en el capítulo 116 de su manuscrito inédito *De viribus quantitatis*: "Suo effecto [della prospettiva] largamente manifesta Topera del nostro LIONARDO VENCI compatriota florentino quando con tutta forza feci in ditto libro [della *Divina proportione*] de sua gloriosa mano li corpi mathematici qual ancora apresso di noi tenemo maravigliosi a ognuno che li mirano". (Véase también en el § XIII un pasaje de la dedicatoria de la misma obra otra indicación donde se alude también a la divina mano izquierda de LIONARDO).

De cuanto se ha dicho y de muchas otras indicaciones podemos llegar a las conclusiones siguientes: LIONARDO DA VINCI dibujó para PACIOLI gran número de figuras geométricas: número mayor que el que éste utilizó después. Así en el *Códice Atlántico*, folio 263, encontramos dos figuras, el *Duodecedron abscisas solidas* y el *Duodecedron abscisas vacuas*, una que el fraile incluyó y otra que quedó sin emplear. Los sesenta dibujos de poliedros que se encuentran en el Codice Sforzesco fueron después cuidadosamente copiados de los originales de LIONARDO en la Cancellería milanesa, donde se preparó el códice para LUDOVICO IL MORO y poco tiempo después otro Códice que PACIOLI ofreció a GALEAZZO DA SANSEVERINO, Códice que actualmente se encuentra en la Ambrosiana de Milano. Se debe advertir que en los dos códices el orden de las figuras es diferente, y que la *figura superfina ex errore* del Códice dedicado a Ludovico il Moro está sustituida en el otro por la *pyramis laterada exagona vacua*. Del tercer Códice, que se supone ofrecido más tarde a PIER SODERINI, nada se sabe. Cuando en 1509 la *Divina Proportione* se imprimió en Venezia, en los talleres de PAGANINO DE PAGANINI, se prepararon las

xilografías utilizando los anteriores dibujos. Pero el resultado fue un tanto deficiente y se debe excluir por completo la hipótesis, afirmada por algunos autores, de que las xilografías fueran preparadas (scalpta) por mano del propio LIONARDO, que probablemente no intervino de ninguna manera en la edición de la *Divina Proportione*. También el orden de las figuras es diferente; además, éstas, que son cincuenta y nueve, llevan la indicación 58 y 61 para las dos últimas. Esto se debe a que no se incluyó la *pyramis laterata exagona solida* y la correspondiente *vacua*, que figuran en el índice al principio del libro, con los números 60 y 61, mientras que la última, la *spera* [sic] *solida*, lleva el número de orden 59. Por lo tanto, la numeración 61 que figura en la última tabla se debe a una confusión. GIOVAN BATTISTA DE TONI nos ha dado la lista y el orden comparativos de las figuras de poliedros comprendidas en los dos códices y en la edición, y además otras interesantes noticias, en un importante artículo: *Intorno un codice sforzesco di Luca Pacioli nella Biblioteca di Ginevra e i disegni geometrici dell'opera "De divina proportione" attribuiti a Leonardo da Vinci*, publicado en *Per el IV centenario della Morte di Leonardo da Vinci*, Bergamo 1919, editado por el Istituto Vinciano di Roma diretto da MARIO CERMENATI.

Queda una última cuestión. Hay quienes erróneamente han atribuido al mismo LIONARDO los modelos de los cuerpos ofrecidos a LUDOVICO IL MORO, del cual habla LUCA al final de su *Divina Proportione*. Esto debe descartarse categóricamente. No sólo PACIOLI, como hemos dicho, preparó en Roma para GUIDUBALDO DA MONTEFELTRO algunos modelos, sino que, como él mismo nos refiere, "e le forme de dicti corpi materiali bellissime con tutta legiadria quivi in Milano de mie proprie mani disposi per lo mio patrone S. GALEAZZO DA SAN SEVERINO in quel luogo. E poi altre in Firenze a la Exa. del nostro S. Confalonieri perpetuo P. SODERINO quali al presente in suo

palazo se ritrovano".

Para terminar con las posibles contribuciones directas o indirectas de LIONARDO a la *Divina Proportione*, agregaremos que parece seguro que los dos perfiles humanos que se encuentran en ella (véanse las reproducciones en esta edición) se tomaron de dibujos de LIONARDO. Véase a este propósito GIUSEPPE FAVARO, *il canone di Leonardo sulle proporzioni del corpo umano* (Atti del Reale Istituto Veneto, 1917).

LA EDICIÓN DE 1509 DE LA *DIVINA PROPORTIONE*

XIII. Hemos ya anotado que años más tarde PACIOLI había ofrecido a PIER SODERINI, gonfaloniere de la república florentina, otro Códice de la *Divina Proportione*. De éste se han perdido completamente las huellas, pero, si verdaderamente existió, es probable que tuviera algunos apéndices a la primera redacción; quizás los dibujos de las letras u otros. De todas maneras, en 1509 PACIOLI empezó la impresión de su obra, y pensó agregar, bajo el mismo título, varias otras partes.

La segunda, fechada 1.º de mayo 1509, está dedicada a varios de sus queridos alumnos y discípulos, "dignos talladores de piedras, sagacísimos cultores de la escultura y arquitectura", y se propone revelarles algunas reglas aplicables a las proporciones de los edificios. En el prefacio dedicatorio habla de muchos hombres ilustres, contemporáneos suyos, de Borgo Sansepolcro, y no es menester detenernos en ellos. Expone después cómo en la arquitectura se pueden distinguir tres partes. La de edificación de los templos, la de las fortificaciones, y la de los palacios privados. De todo esto había tratado "maestro VITRUVIO". Él no pretende hacer de nuevo una obra como la del escritor latino; sino sólo decir pocas palabras sobre algunos temas para satisfacer al ruego que le habían hecho sus mencionados discípulos.

El texto de VITRUVIUS en el Renacimiento era ya conocido desde hacía tiempo, y hemos visto cómo LEON BATTISTA

ALBERTI con su *De arte aedificatoria* había querido sustituir con una moderna la obra del romano. Pero, no obstante los esfuerzos de los humanistas, aparte las divagaciones anecdóticas, al escritor de la época de AUGUSTUS (por lo menos así parece) no se le comprendía entonces de modo satisfactorio. VITRUVIUS, podemos reconocerlo ahora, no es en verdad ingeniero sobresaliente; sacó sus conocimientos de KTESIBIOS, de PHILON DE BYZANTION y de HETON, si este último vivió, como parece probable, en el primer siglo antes de nuestra era. Sobre la complicada "cuestión heroniana", véase en particular mi mencionado volumen *Histoire des Sciences: Antiquité*, donde expongo las razones que me hacen mantener que su época fue la indicada. Sin embargo, VITRUVIUS muchas veces no comprendió lo que copiaba, especialmente cuando se trataba de máquinas o de aparatos complicados. Pero en las partes técnicas sus expresiones contienen locuciones del arte, y fueron éstas las que los humanistas al principio no comprendían y las que hacían "difíciles" sus escritos. Así, no se obtuvo una recta interpretación de la mayor parte de sus términos sino a fines del siglo XVI. A pesar de todo, no faltaron las tentativas de traducirlo, de interpretarlo, y de redactar, sobre sus bases, tratados modernos. Hemos visto cómo se comportó LEON BATTISTA ALBERTI. En la Biblioteca Nazionale de Firenze hay un manuscrito con una traducción que se atribuye a FRANCESCO DI GIORGIO. Sin embargo una traducción (con comentario) de los diez libros de su obra no apareció hasta 1521, debida a CESARE CESARIANO y algunos de sus colaboradores lombardos. Ésta es una de las peores traducciones de la época; no sólo los traductores no comprendían el latín de VITRUVIUS, sino tampoco conocían el italiano, y la traducción imita paso a paso el texto latino en su construcción y en sus mismas palabras. Tiene todo el aspecto y las características de las peores traducciones latinas medievales de tratados árabes. El comentario no es sino una paráfrasis del

texto.

Una verdadera traducción de Vitruvius no se encuentra sino en *Li dieci libri dett'architettura traducti et commentati de Monsignor* [*Daniello*] *Barbaro*, Venezia, 1556. Esto, en época posterior a los notables esfuerzos de la Accademia della Virtù, que se había fundado en Roma en la primera mitad del siglo XVI y que se propuso como tarea principal la interpretación de VITRUVIUS.

Así, pues, no se debe menospreciar lo que realizó PACIOLI tomando algunos pasajes de VITRUVIUS, interpretándolos y agregando comentarios suyos y nuevas ideas. Más tarde la doctrina sobre la arquitectura y construcción de edificios, abandonando el carácter de íntima unión entre ciencia y arte que había asumido después de BRUNELLESCHI, tomará dos rumbos netamente distintos: uno de ellos, con JACOPO BAROZZI, apodado IL VIGNOLA (1507-1573), tendrá carácter exclusivamente estético y alcanzará su máxima expresión clasicista con ANDREA PALLADIO (1518-1580); el otro, exclusivamente técnico, tendrá como representantes característicos a TARTAGLIA y GALILEO.

En los capítulos 1-3 de la parte de la *Divina Proportione* que ahora analizamos, LUCA considera medidas y proporciones del cuerpo humano, que, como él dice, servía de regla para la construcción de los edificios y de sus partes. Esta idea, que ya encontramos en el escritor latino, se había desarrollado vigorosamente en el Renacimiento; entonces, por razones diversas, el estudio de las proporciones del cuerpo humano había llegado a un amplio desarrollo; el *De statua* de LEON BATTISTA ALBERTI está dedicado completamente a este tema, y no es necesario subrayar aquí lo que en este sentido hicieron LIONARDO DA VINCI y ALBRECHT DÜRER. Todos conocen sus dibujos y sus textos sobre las proporciones del cuerpo humano;

además, seguramente el primero discutió largamente la cuestión con su amigo Fra LUCA.

En los capítulos siguientes encontramos finalmente temas estrictamente arquitectónicos; así los capítulos 4-8 consideran las columnas redondas y en particular sus conocidos tres órdenes, los 9-10 las columnas lateradas y las pirámides redondas y lateradas; el capítulo 11 es una digresión sobre las letras que se pueden emplear con provecho en los monumentos arquitectónicos; a estas letras se refieren 24 tablas que se encuentran en la edición original y cuyos esquemas están incluidos en esta edición argentina.

Un amplio estudio sobre dicho alfabeto se encuentra en la obra publicada en lujosa edición por STANLEY MORISON, *Fra Luca de PACIOLI of Borgo S. Sepolcro* (New York, The Grolier Club, 1933).

Los capítulos 12-17 tratan de cómo disponer las columnas en los edificios, de sus intervalos, del arquitrabe y su cornisa, y del friso; por fin, los capítulos 18-20 contienen consejos a los escultores sobre los cuerpos regulares o derivados de ellos que pueden emplear en sus construcciones, sobre cómo deben proceder en lugares angostos, y sobre columnas situadas encima de otras columnas.

Conviene señalar lo que en el capítulo 19 dice de PIERO DELLA FRANCESCA: "en lo que respecta a las matemáticas, lo ilustra claramente el monarca de la pintura y arquitectura en nuestros días, maestro PIERO DELLA FRANCESCA, con su pincel, cuya potencia se muestra en Urbino, Bologna, Ferrara, Rímini y Ancona y en nuestra tierra [es decir Borgo San Sepolcro] en pintura mural y sobre tabla al óleo y al temple, máxime en la ciudad de Arezzo, en la magna capilla del altar mayor, una de las más dignas obras de Italia, que goza de general prestigio. Compuso además el libro *de perspectiva* que se encuentra en la

muy valiosa biblioteca de nuestro ilustradísimo DUQUE DE URBINO". En este *De prospectiva pingendi*, que en otra parte declara haber cuidadosamente estudiado, LUCA comprendía seguramente, como apéndice, el *Libellus* que constituye la tercera parte de la *Divina Proportione*.

Su culpa al publicar esta traducción casi completamente fiel de la mencionada obra de PIERO DELLA FRANCESCA fue la de hacerla con el título y la dedicatoria especial a PIER SODERINI, y sin haber explícitamente nombrado a su autor. Esto puede hacer surgir la sospecha de que LUCA se hiciera atribuir a sí mismo esta obra; y este es el origen de la acusación de plagio que surgió con VASARI y se ha repetido constantemente hasta los tiempos modernos; se encuentra así en la historia de la matemática, de GINO LORIA, en la biografía de PIERO, obra de ROBERTO LONGHI, ya mencionada, y en otros autores. Hemos ya dicho que no nos parece fundada la acusación, y que LUCA, que ya varias veces había mencionado los escritos matemáticos de su conterráneo, debía presumir que la paternidad del escrito fuera conocida, sin necesidad de agregar explícitamente esta indicación. Si esto no fue verdaderamente un plagio, fue, sí, una falta grave de criterio o una imprudencia.

No creemos necesario agregar comentarios relacionados con esta tercera parte de la *Divina Proportione*, cuyo carácter es estrictamente matemático y aparece claro a primera vista. Además, de ésta y de su contenido hemos ya hablado en el párrafo dedicado a PIERO DELLA FRANCESCA.

A estas tres partes siguen numerosas láminas (en total 86), todas reproducidas en esta edición argentina, aunque, algunas veces, en formato menor y a razón de dos o cuatro por página. Indicaciones relacionadas se encontrarán en lugar oportuno.

Después del título, el volumen impreso de *La divina proportione* empieza con tres poesías. La primera es un soneto en

latín con su traducción poética en italiano que canta las virtudes de los cuerpos regulares y se debe probablemente a LUCA. Las otras dos son las mismas que hemos encontrado ya en el códice ofrecido a LUDOVICO IL MORO, y de las cuales, como hemos dicho, el terceto se debe probablemente a LIONARDO DA VINCI. Hay que advertir que aquí, como en otras partes, lo que ensalza LUCA son los cuerpos regulares y no la sección áurea. Esto respondía al espíritu del Renacimiento, que tenía hacia estos cinco poliedros una especie de veneración mística y casi veía en ellos una potencia sobrenatural.

Siguen dos epístolas redactadas en latín, de las cuales en esta edición se da la traducción castellana, una de LUCA PACIOLI a PIER SODERINI, el gonfalonero florentino desde el 1502 hasta 1512, y la otra de DANIELE GAETANI a ANDREA MOCENIGO, patricio veneciano. Esta última elogia la obra del fraile burguense, y no tiene para nosotros interés especial. Por el contrario, la epístola de LUCA al gonfalonero SODERINI nos ofrece algunos aspectos que queremos subrayar. Aunque tal vez PACIOLI exagera en las alabanzas a sus protectores —véase por ejemplo lo que dice de GUIDUBALDO DA MONTEFELTRO en la *Summa* y de LUDOVICO IL MORO en *La divina proportione*— parece que tenía en gran estima al gonfalonero florentino y no participaba de la opinión de NICCOLÒ MACHIAVELLI, del cual es muy conocido el siguiente epigrama:

> La notte che morí Pier Soderini
> Palma n'andò dell'inferno alla bocca,
> ma Pluto le gridò: anima sciocca,
> che inferno, va nel limbo dei bambini!

De la epístola a Soderini destacamos una noticia interesante. LUCA anota que cuando fue derrocado LUDOVICO IL MORO y fueron saqueadas sus propiedades, SODERINI pudo tomar posesión del códice de *La divina proportione* que él había ofrecido al duque de Milano. A pesar de esta afirmación el

hecho no está históricamente comprobado. Por otra parte, LUCA no hace mención alguna del códice que, como dijimos, habría ofrecido a PIER SODERINI, aunque trata de los modelos de poliedros que le había donado. Por tales circunstancias, es ésta una cuestión aún no aclarada.

Es interesante la noticia que LUCA nos proporciona acerca de su traducción italiana —hoy perdida— de los *Elementos* del "megarense" EUKLEIDES. Es oportuno observar que, basándose en algunos datos equivocados, durante todo el Renacimiento se confundió al gran geómetra que vivió en Alejandría con uno de los filósofos que ordinariamente se mencionan como discípulos de la extraña figura de SOKRATES —sobre el cual y sobre una nueva interpretación de la figura histórica de este "sofista mancato" pueden verse mis ya citados libros de historia de la ciencia en la antigüedad— dando siempre al autor de los *Elementos* como natural de Mégara. Solamente con CLAVIUS (CHRISTOPH SCHLÜSSEL, 1537-1632) y con su edición latina de los *Elementos* (primera edición 1577) se llega a rectificar este error, que desde entonces fue desapareciendo paulatinamente de la literatura matemática.

EL *DE VIRIBUS QUANTITATIS*

XIV. Las obras más conocidas de LUCA PACIOLI son la *Summa* y la *Divina Proportione*; menos sabido es que hay otra, que no fue nunca impresa y cuyo manuscrito casi completo se encuentra en la Biblioteca Universitaria de Bologna. Se trata de una reunión de gran número de problemas curiosos, que si hubiera sido publicada habría constituido el primer libro impreso de esta naturaleza. Así, pues, el primero es el de CLAUDE-GASPARD BACHET DE MÉZIRIAC (1581-1638), titulado *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*, que obtuvo dos ediciones, una de 1612, otra de 1624.

El *De viribus quantitatis* comprende tres partes; I. *Delle forze numerali cioè de aritmética*. II. *Della virtù e forza lineale et geometrica*. III. *De documenti morali utilissimi*, y fue probablemente escrito entre la fecha del ofrecimiento a LUDOVICO IL MORO del Codice con la primera parte la *Divina Proportione* (1496?, como, quizás erróneamente, escribe LUCA en la epístola dedicatoria de esta obra) y la publicación de esa obra en Venezia en 1509; en la Dedicatoria —donde falta el nombre del personaje a quien se la ofrecía—, en efecto el autor se refiere a la primera pero no trata de la última.

La primera parte comprende 81 problemas, muchos de los cuales ya estaban en el *Líber Abad* de LEONARDO PISANO, mientras otros se encontrarán de nuevo en TARTAGLIA o en publicaciones posteriores. La mayoría de ellos tratan de adivinar

un número pensado por otro apoyándose en algunas indicaciones: se resuelve con ecuaciones de primer grado.

AMEDEO AGOSTINI, que en *Periodico de Matematica*, Bologna, 1927, pág. 165, publica un interesante estudio, *"De viribus quantitatis" di Luca Pacioli*, además de interesantes noticias generales, reproduce la *Epístola dedicatoria* y los enunciados de los 81 problemas, con la indicación de su resolución; creemos interesante señalar: el 24.º: "Un número che partito por 2, 3, 4, 5, 6 sempre avanzi 1 et partito per 7 avanzi nulla" que conduce a la ecuación diofantea $z = \frac{60x+1}{7}$

Un problema análogo se encontraba en LEONARDO PISANO, y otros similares se encuentran en TARTAGLIA y BACHET. El 53.º, "a partiré una botte de vino fra doi", haciendo dos partes de una tina de 8 "some", y pudiendo disponer sólo de otras dos tinas, respectivamente de 5 y de 3 "some", es un conocido problema que se encontraba ya en CHUQUET y que reaparecerá en GHALIGAI y en TARTAGLIA. En el 72.º, encontramos por la primera vez en un escritor del occidente de Europa noticia de los cuadrados mágicos. "A Pastronomia" él escribe "summamente hanno mostrato gli supremi di quella, commo PTOLOMEO, ALBUMASAR, ALI, ALFRAGANO, GEBER et gli altri tutti, la forza et virtu de numeri eserli necessaria et principalmente doverlise acomodare commo senza loro per alcun modo poter fare. Onde ali pianeti tutti separatamente a cadauno hanno trovato numeri per via de figure quadrate esserli apropriati secondo diverse spetie de numeri quali per ogni verso pressi fanno sempre la medesima somma". Cada figura se compone "de tutte le figure numerali excepto la cifra over nulla". PACIOLI da cuadrados de 9, 16, 25, 36, 49, 64 y 81 números, respectivamente atribuidos a Saturno, Júpiter, Marte, Sol, Venus, Mercurio y Luna. Se debe notar que erróneamente se había considerado a DÜRER como el primero que introdujo

estos cuadrados en Europa occidental, por el hecho de encontrarse en su celebre incisión de 1514 titulada *Melancholia* un cuadrado mágico en cuya primera columna aparecen los números 1, 12, 8 y 13; en la segunda, 14, 7, 11 y 2; en la tercera 15, 6, 10 y 3; y en la cuarta, 4, 9, 5 y 16 que ya se encontraba es MOSCHOPOULOS (un bizantino del siglo XIV). Pero éste es el único que trata de esta cuestión entre los griegos, mientras los cuadrados mágicos habían sido varias veces considerados por hindúes y árabes.

Hay además otros problemas no matemáticos, como el de transportar en una barca a través de un río un lobo, una cabra y un repollo, cuando sólo uno de ellos puede meterse en la barca; y con la condición de que ni el lobo se coma la cabra, ni la cabra el repollo. Otra cuestión se relaciona con la invención del juego del ajedrez.

La segunda parte contiene 80 problemas, principalmente de carácter geométrico, a los cuales siguen 54 construcciones aproximadas de polígonos regulares de 9, 11, 13 y 17 lados, para los cuales da las siguientes valores:

$1_9 = \frac{1_3 + 1_6}{4}$ para 1_{11} la parte mayor de la sección áurea $\frac{1_3 + 1_6}{3}$ mientras la parte menor de la sección áurea $\frac{5r}{2}$ de nos da 1_{13}.

Para 1_{17} el texto está deteriorado de manera que no es posible descifrarlo exactamente; así en la literatura matemática una primera verdadera solución (aproximada) de este problema la encontramos sólo con LEONHARD EULER.

La tercera parte comprende además un conjunto de anécdotas, proverbios, poesías, etc. Se encuentra, por ejemplo, la anécdota conocida del huevo de Colombo, pero que en este caso está atribuida a FILIPPO BRUNELLESCHI.

Para completar estas breves noticias sobre el *De viribus quantitatis* reproduzco lo que PACIOLI escribe en la dedicatoria sobre la colaboración de LIONARDO DA VINCI. "Et non mancho anchora en la sublime nostra opera detta della divina proportione, nelli anni similmente salutiferi 1496 a lo Ex.mo et potent.mo Duca de Milano LUDOVICO MARIA SFORZA dicata et con dignissima gratitudine presentata, ne fo discorzo con le supreme el legiadrissime figure de tutte li platonici et Mathcematici rigulari et dependente, ch'in prospectivo disegno non è possibile al mondo farle meglio, quando bene APELLE, MIRONE, POLICLETO e gli altri fra noi tornassero facerle et formate por quella inaffabale senistra mano a tutte discipline Mathematici acomodatissima del principe oggi fra mortali, pro prima fiorentino, LIONARDO nostra da *venci*, in quel felici tempo ch'insiemi ai medesimi stipendi nella mirabilissima citta di Milano ci trovavamo".

De la dedicatoria resulta también que PACIOLI, dedicándolo a FRANCESCO GONZAGA y a ISABELLA D'ESTE, "marchesi de Mantova", había efectivamente escrito un tratado sobre el juego del ajedrez, que formaba parte de una obra titulada *De ludis o Schifanoia*.

LA INFLUENCIA DE LA OBRA DE LUCA PACIOLI

XV. La enseñanza y la obra científica de PACIOLI obtuvo una influencia más honda de lo que generalmente se piensa. Claro es que su enseñanza en casi todas partes de Italia debía ejercer una influencia enorme. No menor fue la de sus obras impresas, y quizás la de unas manuscritas.

La *Summa*, impresa en 1494, obtuvo otra edición, como hemos dicho, en 1533. Más tarde los progresos alcanzados especialmente en el álgebra exigieron obras más avanzadas. Pero, como mostraremos, encontramos en éstas las huellas del escrito paciolano. Más tarde la *Summa* no obtuvo nuevas ediciones.

La *Divina Proportione* fue impresa en 1509. Después, en aquella época no obtuvo otras ediciones. Sólo en 1889 obtuvo una nueva edición acompañada de una traducción alemana y comentada por COSTANTIN WINTERBERG, WIEN. La única nueva edición, en traducción castellana, es ésta debida a RICARDO RESTA. No conozco la traducción alemana, para dar un juicio sobre ella; pero ciertamente esta traducción castellana, hecha cuidadosamente por un conocedor perfecto de los dos idiomas y del tema considerado, puede satisfacer completamente a los que quieren conocer y estudiar la obra del fraile burguense, que en la mayoría de los casos se encontrarían desamparados al recurrir al texto original, no sólo por dificultades tipográficas sino también por la lengua y el estilo bárbaro que LUCA empleó. No debo aquí exponer los criterios seguidos por el editor y el

traductor; este último dirá algunas palabras él mismo sobre este tema. Agregaré solamente que RESTA, que fue mi auxiliar cuando yo era director del Instituto de historia y filosofía de la ciencia en la Universidad del Litoral, Santa Fe, me ha consultado frecuentemente a propósito, y constantemente ha encontrado mi aprobación.

Pocas palabras ahora sobre los personajes y las obras que sintieron más la influencia de PACIOLI.

En primera línea se debe en este caso citar a LIONARDO DA VINCI (1451-1519) su contemporáneo. Pero de éste hemos tenido varias ocasiones de hablar, y un estudio cuidadoso de la influencia pacioliana sobre el gran toscano sería demasiado larga. El lector, además de lo que hemos dicho en varias ocasiones, podrá recurrir directamente a la magnífica edición del *Tratado de la pintura*, publicada en Buenos Aires por la misma editorial Losada. En particular encontrará, interesantes indicaciones sobre la perspectiva y las proporciones del cuerpo humano, donde comprobará directamente las afinidades que existen entre los dos contemporáneos y amigos.

Varios años más joven que el fraile burguense es un famoso artista alemán que debe mucha parte de su arte y de su ciencia a Italia, la cual fue para él una revelación en manera análoga a lo que fue tres siglos más tarde por el célebre WOLFGANG GOETHE. Se trata de ALBRECHT DÜRER (1471-1528), natural de Nürnberg. Éste ya en 1495 estaba en Venezia, y permaneció en Italia más de diez años. Allí tuvo íntimas relaciones con aquel JACOPO DE' BARBARI, que lo introdujo en el conocimiento de los esfuerzos que durante un siglo los artistas italianos, a partir de BRUNELLESCHI, habían hecho para aplicar la ciencia al arte. Este JACOPO DE' BARBARI es presumiblemente el autor del famoso retrato de LUCA PACIOLI que reproducimos en este volumen.

No cabe duda de que, a lo menos por esta vía, DÜRER llegó

a conocer la obra del fraile burguense, del cual sentimos la influencia en los escritos matemáticos del alemán, así como en particular la de LEON BATTISTA ALBERTI. De todas maneras, el alemán se propuso de hacer conocer a sus compatriotas lo que en este sentido se había hecho en Italia. Bien que sus propósitos fueron más amplios, él nos dejó sólo tres obras importantes que obtuvieron no sólo muchas ediciones alemanas, sino también traducciones latinas y francesas, y algunas italianas, portuguesas y holandesas.

Una de estas obras, publicada en 1525, es de naturaleza geométrica y considera los cuerpos regulares y derivados, y revela sus estudios de los trabajos de PIERO DELLA FRANCESCA y de LUCA PACIOLI; su título alemán es *Underweysung der messung mite dem zirckel, in Linien ebnen und, gantzen corporen*. La segunda, publicada en 1527, se ocupa de fortificaciones y lleva el título *Etliche vnderricht zubefestigung der Schlosz und Flechen*. La tercera, que apareció postuma en 1528, trata también un tema muy apreciado por PACIOLI y LIONARDO DA VINCI, las proporciones del cuerpo humano; su título es *Vier bücher von menschlicher Proportion*. No obstante algunas características específicamente alemanas que tiene Dürer, debe considerársele en la línea de los artistas matemáticos italianos. No es el caso de detenernos en analizar su obra[1].

Algunas décadas después de la muerte de PACIOLI aparecieron algunos escritos matemáticos seguramente originales y de valor, pero que en muchas partes saquearon a PACIOLI, a pesar de no abstenerse de hablar mal de él. Son obras de Gerolamo Cardano (1501-1576) y de NICCOLÒ TARTAGLIA (1505?-1557).

El primero es un polígrafo que escribió en latín obras de matemática, de filosofía, de medicina, y sobre toda clase de conocimientos. Sus escritos, que obtuvieron una difusión en

todo el mundo civilizado, son una mezcla de noticias tomadas en todas partes, no siempre presentadas con orden, enriquecidas con algunas intuiciones geniales, pero llenas de ideas místicas y extravagantes, que pueden plantearnos el problema de si CARDANO puede considerarse un verdadero sabio. Pero no es aquí el lugar de hacer el proceso a la mentalidad del celebrado sabio milanés; observaremos sólo que en sus obras matemáticas, de las cuales únicamente citamos la *Practica arithmetica* (1539) y la *Artis magnae sive de regulis algebraicis líber unus* (1545); toma mucho de PACIOLI, bien que gran parte del segundo escrito se ocupa de la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado, conquista alcanzada después de la muerte del fraile burguense.

Un verdadero sabio es, por lo contrario, NICCOLÒ TARTAGLIA, personaje que presenta muchas características similares a las de LUCA. Como éste, escribe en lengua vulgar, sirviéndose él también de un idioma bastante bárbaro; como éste se interesa en los clásicos (EUKLEIDES, ARCHIMEDES); como éste, se propone escribir una gran enciclopedia matemática, el *General trattato di numeri et misure*. Desgraciadamente no llegó a terminar esta obra, y de ella aparecieron sólo seis partes: las dos primeras en 1556, las otras cuatro en 1560 después de la muerte del autor, y la última de éstas redactada por un “dotto matemático” sobre apuntes del autor. En este caso tampoco podemos detenernos a examinar la obra de TARTAGLIA y la relación que tiene con los escritos de PACIOLI; por esto enviamos a la historia particular de la matemática.

A continuación citamos solamente algunos nombres y títulos de obras que más o menos pueden encontrarse en la línea trazada por PACIOLI. Merece así mencionarse el *Álgebra* de RAFAEL BOMBELLI, cuyo prefacio está fechado 22 de junio 1572. En Alemania las obras escritas en vulgar teutónico por ADAM RIESE (n. 1492), CRISTOPH RODOLFF (muerto poco antes de

1552) y Michael Stiefel (1486-1567) derivan en gran parte directamente de la *Summa*. Una influencia de éste puede también encontrarse en los escritos de uno de los más grandes de los sabios de la época, Simon Stevin (1548-1620). Entre los escritos de Guido Ubaldo dei Marchesi del Monte (1545-1607), el conocido protector de Galileo Galilei, encontramos su *Perspectivae Libri sex*, que condujo entonces a la perfección una ciencia estimada por Piero della Francesca y Pacioli. Sobre la perspectiva había también trabajado su maestro Federico Commandino (1509-1565), uno de los mejores traductores y editores de los geómetras griegos.

Con estos pocos nombres terminamos la enumeración de autores que pueden relacionarse con el nombre de Pacioli.

Aldo Mieli.

ADVERTENCIA DEL TRADUCTOR

El sueño que Attilio Rossi concibió, desde cuando vivía en Italia, de una edición moderna de la Divina Proportione, *se realiza al fin, en tierra de América, con esta traducción castellana, gracias a la feliz conjunción de una serie de factores, entre los cuales hay que contar la tenacidad y pericia gráfica del soñador, la organización y espíritu humanista de la Editorial Losada, la coincidencia de que existiera en Buenos Aires un ejemplar de la edición original*[2] *y —¿por qué no?— la paciencia del traductor.*

Las dificultades del texto original, confuso y plagado de errores y empastelamientos tipográficos, anticipaban una tarea que al principio temí superior a mis facultades. Se trataba de dar al material amorfo del original una forma castellana que fuera accesible al lector moderno, sin desvirtuar el carácter impreciso de la prosa científica de la época. Este carácter cobra singular expresión en nuestro autor, quien escribe como habla —muy mal, por cierto — saltando de una idea a otra, sin orden aparente, y con todas esas faltas morfológicas y sintácticas, tan comunes en el lenguaje oral, como frases mal construidas, a menudo inconclusas, concordancias erróneas, excesivas prolepsis y repeticiones superfinas.

Con este criterio, he respetado la imprecisión de la terminología científica. Por lo tanto, no se extrañará el lector cuando encuentre expresiones como éstas: "equidistante" por "paralela", "base" por "cara", "lado" por "arista", "circunferencia esférica" por "superficie esférica", y palabras inventadas —por derivación del griego, del

latín o del árabe— como "corausto", "serátil", "laterado" y "elmuarisa". Lo más común es encontrar términos genéricos empleados para conceptos específicos, y viceversa; asimismo es muy frecuente el uso de vocablos relativos a conceptos de un sistema dimensional determinado para significar los que corresponden análogamente en el sistema inmediato, como el caso de "círculo" por "circunferencia".

En cuanto al lenguaje operacional, la falta de signos como el de radicación o el paréntesis podría dar lugar a confusiones, pero también en este caso el lector prevenido interpretará adecuadamente. Por ejemplo: raíz de 20 más 2 corresponde a nuestra fórmula $\sqrt{20}+2$*; si fuera* $\sqrt{20+2}$*, se diría: raíz de la suma que da* 20 *más* 2*; asimismo,* 20 *más* 2 *menos* 5 *más* 6 *podría significar* 20 + 2 − 5 + 6*, o también* 20 + 2 − (5 + 6)*, pero en este caso el autor diría* 20 *más* 2 *menos* 5 *y* 6*. Los distintos símbolos del original los he traducido con el vocablo castellano correspondiente.*

Se notará también que Pacioli, entre otras cosas, no siempre eslabona en todas sus etapas los razonamientos y cálculos matemáticos, y que, además, cuando opera con raíces y potencias omite a menudo indicarlo expresamente; por ejemplo, cuando dice que la mitad de 98 *es* 24 ½ *sin aclarar que se refiere a las raíces respectivas.*

Para los términos técnicos de arquitectura hemos adoptado por razones obvias, de acuerdo con el arquitecto Gastón Alberto Breyer, que ha colaborado en la revisión, el criterio general de conservar la palabra del texto original, transcribiéndola en cursiva, cuando el autor consigna el término correspondiente a un determinado elemento arquitectónico con la expresa intención de señalar la palabra que usaban "los antiguos" o "los modernos". Se advertirá que Pacioli altera las desinencias de las palabras latinas o griegas adaptándolas al italiano.

La tercera parte[3]*, a causa de sus numerosos errores, nos ha*

planteado un problema prácticamente insoluble. En efecto, no siempre es posible determinar si los errores son meramente tipográficos, pues cabe la probabilidad de que sean de Pacioli, al traducir de Piero, o hasta del mismo Piero, sobre todo si se tiene en cuenta que el método matemático empleado requiere cálculos en que intervienen números hasta de treinta cifras. Por eso, hemos seguido el temperamento de corregir los errores sólo en los casos en que puedan considerarse, con cierto derecho, errores de imprenta; por ejemplo, cuando una determinada expresión numérica que aparece en forma correcta al menos una vez se repite luego en forma equivocada. Para ello hemos contado con la colaboración de D. Juan Carlos Grimberg, que, además de revisar en general la parte matemática de esta traducción, ha rehecho todos los cálculos, con resultados que se tuvieron en cuenta para introducir las correcciones oportunas.

En la primera y segunda parte, en cambio, creo haber resuelto satisfactoriamente esta cuestión de los errores. En los casos de saltos tipográficos no he encontrado, afortunadamente, ninguno que afecte seriamente la continuidad del texto. En nota señalo dónde se encuentra el salto y transcribo, si es oportuno, parte del texto inmediato anterior y posterior a la omisión, destacando en redonda las palabras en suspenso que, para lograr continuidad en el texto castellano, no he traducido. Las otras notas se relacionan, en general, con problemas de la traducción. Las de la segunda parte que aclaran la terminología arquitectónica me han sido sugeridas por el señor Breyer. Las indicaciones anotadas relativas a EUCLIDES [4] *se dan cuando las citas de Pacioli, que corresponden al texto de Campano, no concuerdan con el texto establecido modernamente, texto que, como es sabido, ofrece, entre otros cambios, una ordenación distinta. Tampoco en este caso descarto la posibilidad de errores del original; pero, en general, en citas repetidas en distintas partes no he observado contradicciones. Una verificación completa sería posible únicamente confrontando el texto de Campano;*

desgraciadamente tal texto es muy difícil de conseguir. Por esta razón no he podido verificar las citas que se refieren a los libros XIV *y* XV*, de pseudopaternidad euclídea. Tampoco he podido conseguir la traducción alemana de la* Divina Proportione, *hecha por Winterberg, cuya confrontación habría resuelto, a lo menos en parte, estas dificultades.*

He anotado también las indicaciones[5] *de los pasajes de Vitruvio transcritos por Pacioli, que no he traducido porque he dejado en idioma original todas las pastes en latín, con la salvedad de que he modernizado la puntuación y corregido algunas formas ortográficas. Como excepción he traducido las dos primeras epístolas.*

Como última advertencia, llamo la atención del lector sobre las figuras que, por haberse reproducido facsimilarmente, adolecen de los errores del original: letras mal colocadas, no siempre correspondientes a las del texto, dibujos incompletos, etc. Por eso aconsejo al lector que, "con la penna in mano" según sugiere Pacioli[6]*, dibuje, a medida que vaya leyendo, las figuras correspondientes al texto.*

En los casos más necesarios hemos incluido figuras aclaradas o que no están en el original. El orden de distribución se ha cambiado cuando en el original no corresponde al del texto.

Se advertirá también que las proporciones de las figuras arquitectónicas no siempre concuerdan con las que se dan en el texto.

Concluyendo esta breve nota, quiero expresar mi agradecimiento al doctor Aldo Mieli por sus consejos en la solución de problemas científicos, especialmente en lo que se refiere a la identificación de personas nombradas en el texto; a los doctores Raimundo Lida y Pedro Henríquez Ureña, por haber revisado el texto castellano; al arquitecto Gastón Alberto Breyer y a don Juan Carlos Grinberg, los cuales, como dije, han colaborado en la parte

arquitectónica y matemática, respectivamente.

RICARDO RESTA

DANIELIS CAIETANI CREMONENSIS

EPIGRAMMA

Natura omniparcns produxit corpora quinque;
Simplicia haec certo nomine dicta manent.
Composito in numerum concurrunt addita cuique
Atque inter scse consociata vigent.
Condita principio pura et sine labe fuere;
Nomina sunt aer, coclum, aqua, flamma et humus.
Foctibus innumeris voluit Plato maximus illa
Esse, ubi est primum sumpta figura, dare.
Sed quia naturae lex nil concedit inane
(In coelo et mundo dixit Aristóteles),
Quodque unum per se positum est, caret atque figura;
Nulla subest oculi supposito species.
Propterca Euclidac sublimius atque Platonis
Ingenium excussit sphaerica quinque alia,
Iocunda aspectu et multum irritantia sensum,
Monstravere bases ut latus omne docet.

SONETO DEL AUCTOR

Cinque corpi in natura son producti,
Da naturali semplici chiamati,
Perché a ciascun composito adunati
Per ordinc concorran fra lor tutti.
Immixti, netti e puri fur constructi;
Quattro elementi e ciel cosí nomati,
Quali Platone vol che figurati
L'esser dien a infiniti fructi.
Ma perché el vacuo natura abhorre,
Aristotil, in quel de coclo ct mundo,
Per se non figurati volse porre.
Però l'ingcgno geómetra profondo
Di Plato c d'Euclide piaeque exporre
Cinqu'altri che in sfera volgan tundo,
Regolari, d'aspeto iocundo,
Comme vedi, de latí c basi pare.
E un altro sexto mai se po formare.

FINIS

CORPORA AD LECTOREM

El dolce fructo vago e si dilecto
Constrinse già i philosophi cercare
Causa de noi che pasci l'intellecto

DISTICON AD IDEM

Quaercre de nobis fructus dulcissimus egit
Philosofos causam mens ubi laeta manct.

CORPORA LOQUUNTUR

Qui cupitis rcrum varias cognoscere
causas Discitc nos; cunctis hac patct una via.
FINIS

A LA DIVINA PROPORCIÓN

A ti, maravillosa disciplina,
media, extrema razón de la hermosura
que claramente acata la clausura
viva en la malla de tu ley divina.
A ti, cárcel feliz de la retina,
áurea sección, celeste cuadratura,
misteriosa fontana de mesura
que el universo armónico origina.
A ti, mar de los sueños angulares,
flor de las cinco formas regulares,
dodecaedro azul, arco sonoro.
Luces por alas un compás ardiente.
Tu canto es una esfera transparente.
A ti, divina proporción de oro.

RAFAEL ALBERTI

LA DIVINA PROPORCIÓN

[EPISTOLA DE LUCA PACIOLI A PIER SODERINI]

EXCELLENTISSIMO REI PUBLICAE FLORENTINAE PRINCIPI PERPETUO DOMINO PETRO SODERINO FRATER LUCAS PATIOLUS BURGENS1S, MINORITANUS ET SACRAE THEOLOGIAE PROFESSOR, S. D. Como estas disciplinas, que los griegos llaman matemáticas, ofrecen no menor utilidad que placer, oh príncipe dignísimo de esta muy ilustre patria, como sabe bien Vuestra Excelencia, que es de los más expertos en ellas, y [vuestro] *hermano sapientísimo y protector mío singular, el cardenal, y Giovanni Vittorio* [otro] *eximio y óptimo hermano, y, en fin, toda la familia de los Soderini, que —como es manifiesto— os destacáis todos en esta facultad, por eso esta nueva obra, que ya hace tiempo me esfuerzo en dar a luz, decidí dedicárosla, para proporcionar así una satisfacción a todos vosotros, cuyo afecto me acompañó durante toda mi vida.*

Dicha facultad, en efecto, que es de tanto provecho y deleite, como sabéis por experiencia propia, es increíble cuán pocos sostenedores versados tiene. Yo, empero, que desde tierna edad (según dicen) he logrado en estas disciplinas, a juicio de muchos, algún provecho, gracias a un intensísimo estudio, ya hace tiempo había publicado la obra en que, en lengua vernácula, abarqué casi todos los fundamentos de esta disciplina, obra que hace algunos años había dedicado a Guittone da Feltre, y que se imprimió en Venecia, según se lee. A esa preocupación se suma ahora el haber tratado de dar en el idioma patrio los elementos del megarense EUCLIDES, *dado*

el aumento de los estudiosos, lo que logré muy felizmente, diis bene invantibus, y no mucho después, conforme a la expectativa de todos, legué públicamente a Ludovico Sforza, duque de Milán, el pequeño libro titulado Divina Proportione. *Y con tanto entusiasmo que incluí en él esquemas hechos*[7] *por la mano de nuestro Lionardo da Vinci, para hacerlo más instructivo a la vista. Y, como había recibido de él grandísimos favores, se lo ofrecí cuando aún vivía. Y a esa donación nuestra dieron especial lustre dos lumbreras de la Iglesia Romana, allí presentes: el cardenal Estense y vuestro sapientísimo señor hermano el cardenal. Manifestaron su aprobación Francesco Pepo, ilustrísimo ciudadano y clarísimo orador de aquel tiempo, a la par que vuestro hermano. Dicho libro, en verdad, Excelencia, puede con todo derecho, reivindicarlo para sí, pues se había perdido cuando cayó el principado de Ludovico, y Vuestra Excelencia lo recobró. En él recrearéis vuestro ánimo y olvidaréis vuestras preocupaciones públicas.*

Para que no quedara sin ningún agregado he añadido como apéndices dos breves partes, una de las cuales contiene la forma exactísima de los caracteres antiguos, mostrando la virtud de las líneas curva y recta. [……][8] *Todo para que, al igual que los libros a nombre de vuestros familiares, tenga difusión también en los municipios de los míos, así ellos, que todo os lo deben, no podrán, tampoco en esta ocasión, desconocer su deuda hacia Vuestra Excelencia. Por otra parte, todo esto lo escribimos expresamente para Vuestra Excelencia, pues, a decir verdad, es lo más sublime, lo más extraordinario y lo más útil que tienen las disciplinas matemáticas. Por eso, al declinar ya mi vida, no quise privar a la posteridad de esta obra, como si fuera un tesoro recóndito, sobre todo pudiendo dedicarla exclusivamente a Vuestra Excelencia, que, sobresaliendo en toda clase de virtudes y monarca de nuestro tiempo, se destaca en todo esto y en todos los aspectos de la vida, meta ésta que todos anhelan y que alcanzaréis, pues mi obra se refiere propiamente a la parte activa del universo. Y, sin duda, os resultará*

tanto más grata cuanto que hasta tendréis en vuestra casa los modelos hechos por nuestra mano. Pero lo que proporciona mayor placer es el asunto mismo, lleno de interés e ingenio. No ha de chocaros, por cierto, esta lengua patria, vernácula, pues este libro, cuanto más sean los que lo lean, mayores frutos dará, y, sobre todo, porque en estas cosas exigiréis ingenio y no elocuencia, como Vuestra Excelencia y su hermano el Cardenal Volterrano, a quien debo hasta la vida, sabéis muy bien. Os deseo siempre toda felicidad. Vale et salve.

En Venecia a 9 de mayo de 1509

[EPISTOLA DE DANIELE GAETANI A ANDREA MOCENIGO]

MAGNIFICO ET CLARISSIMO ANDREAE MOCENICO, VENETO PATRICIO VIRO, MAGNIFICI ET GENEROSISSIMI DOMINI LEON ARDI OLIM SERENISSIMI PHILOSOPHO INSIGNI ATQUE IN OMNI GENERE DOCTRINAE SPECTATISSIMO, DANIELIS CAIETANI EPISTOLIUM. Me complace sumamente, oh magnífico Andrea, la suerte que tiene el actual siglo de que esté recién publicado el libro sobre la divina proporción, escrito por el maestro Luca Pacioli da Borgo Sansepolcro, esclarecidísimo representante de la orden minoritana, de quien dudo que podamos en lo sucesivo encontrar algún émulo en materia matemática.

Y he aquí que cuando fui a verlo (pues, según acostumbro muy a menudo, había ido de improviso a saludarlo en su casa) lo encontré ocupado en la revisión del libro. Le pregunté si me necesitaba para algo y él me contestó: "Nada, sino que me quieras y conozcas mi Divina proporción*, que los calcógrafos están imprimiendo". Al instante me regocijé sobremanera de que favoreciese a nuestro siglo con el tesoro de un tan grande, extraordinario e incógnito arcano, con el cual, sin duda, aumenta la fama del autor, pero también el conocimiento de los demás. La fidelidad y aguda sutileza con que trata y desmenuza cosas superiores e inaccesibles a la comprensión ajena es tal, que lo que nadie, hasta hoy, pudo comprender o conocer en este género de arte, él solo, indagando con su altísimo intelecto, conquista e investiga.*

Dice que se dedica a esta materia con gran energía y máxima disciplina, pues en ella fracasan los eternos inconstantes.

Reconoceréis que Luca Pacioli es para nuestro tiempo otro Nicómaco, el cual escribió abundantemente sobre las disciplinas del número y de la medida. Y así, no bien pude, gracias a la disminución de mis ocupaciones, decidí desahogar el ímpetu de mi increíble alborozo con esta epístola dirigida a Vos, hombre de extraordinaria probidad y ciencia. Estoy seguro de que Vos, que fuisteis siempre avidísimo lector de cosas excelentes y juez indubitado, lo seréis, con más razón, de esta materia extraordinaria, profunda, ingeniosa y llena de contenido. Esta preclarísima obra sobre la divina proporción, debida únicamente a LUCA PACIOLI*, exquisitísimo maestro en los secretos de la sagrada teología, aparece en vulgar, lengua en la cual nada tuvo nunca aceptación, salvo que fuera muy digno de loa. Os escribo única y exclusivamente por esta máxima razón, es decir, para sacaros de las honduras de las cosas públicas e incitaros a que os dediquéis a iniciaros en tan grande doctrina. Y esto confío lograrlo tanto más fácilmente cuanto que gozáis del juvenil vigor de edad y ánimo con que después de haber ido a Padua, a la veracísima fuente de la ciencia, con loable avidez obtuvisteis el título de genuino y absolutísimo filósofo, aplaudido fragorosamente por todo el gimnasio. Pero en este elaboradísimo tratado no sólo encontraréis cosas para aprender, sino también para enseñar. Mucho habéis oído y mucho habéis adquirido por vuestro propio esfuerzo bajo la óptima guía de matemáticos y naturalistas, doctores que habéis emulado con admirable empeño. Pero, en esta materia, os daréis fácilmente cuenta de que hasta ahora no hubo en el género ningún doctor que pueda compararse con éste (sea dicho sin ofender a los demás). A esto se agrega el hecho de que se adentra en un tema, por cierto temible, con tanta facilidad como si todo viniese de una animada y llana discusión en común, para que se interesen hasta los ignorantes e inexpertos. Así puede verse en el* EUCLIDES*, que tradujo*

del romano al vernáculo, sin apartarse en nada de la opinión intachable del señor Campano, a quien acepta y sigue con gran fidelidad. Es hora de cerrar esta epístola en que [os] hice gustar estas pocas intimidades. Pero Vos, en verdad, oh censor máximo, leed el libro y no bien lo hayáis leído lo juzgaréis digno de ser ensalzado con un merecido elogio. Vale.

En Padua a 9 de mayo de 1509

PRIMERA PARTE

CAPÍTULO I

EXCELLENTISSIMO PRINCIPI LUDOV1CO MARIAE SFORCIAE ANGLO MEDIOLANENS1UM DUCI, PACIS ET BELLl ORNAMENTO, FRATRIS LUCAE PACIOU EX BURGO SANCTI SEPULCHRI ORDINIS MINORUM, SACRAE THEOLOGIAE PROFESSORIS, DE DIVINA PROPORTIONE EPISTOLA. Al correr, oh excelso Duque, el año de nuestra salvación 1498, el 9 de febrero, en la inexpugnable fortaleza de vuestra ínclita ciudad de Milán, dignísimo lugar de vuestra acostumbrada residencia, en vuestra presencia constituido en laudable y científico certamen, con el concurso de muchos celebérrimos sabios de todo orden, tanto religiosos como seglares, en los cuales asiduamente abunda vuestra magnífica corte, en aquel número, además de las reverendísimas señorías de los obispos, protonotarios y abades, estuvieron, de nuestra sagrada y seráfica Orden, el reverendo padre y sublime teólogo Maestro GOMETIO, con el dignísimo pregonero de la sagrada escritura Fray DOMENICO, de apellido PONZONE; el reverendo padre Maestro FRANCESCO BUSTI, hoy regente diputado en nuestro digno convento de Milán; y, de los seglares, primero mi propio protector, el Ilustre Señor GALEAZZO SFORZA; el Señor [GALEAZZO DA SAN] SEVERINO, esforzadísimo general de Vuestra Ducal Alteza, capitán en las armas, hoy a nadie inferior, y diligente secuaz de nuestra disciplina.

Estuvieron también oradores de muy preclaras potencias y los máximos maestros de la medicina y la astronomía; y AMBROGIO ROSA, clarísimo y agudísimo estudioso de SERAPIÓN y AVICENA, indagador de los cuerpos superiores e intérprete de

las cosas futuras; el doctísimo curador de todos los males ALVISE MARLIANO, y GABRIEL PIRÒVANO, sagacísimo estudioso de todos los campos de la medicina; y NICOLÒ CUSANO, por los nombrados muy admirado y venerado en todas estas cosas, con el peritísimo en las mismas profesiones ANDREA NOVARESE; y otros muy eximios y expertos doctores *utriusque iuris* y consejeros, secretarios y cancilleres de vuestra honorabilísima magistratura; y en compañía de los muy perspicaces arquitectos y asiduos inventores de cosas nuevas, LIONARDO DA VINCI, nuestro compatriota florentino, cuyo nombre es reconocido en todas sus obras de escultura, fundición y pintura. Así la admirable y estupenda estatua ecuestre, cuya altura desde la cabeza hasta el plano de la tierra es de 12 brazas, es decir 37 $\frac{4}{5}$ veces la presente línea *ab*, y cuya masa de bronce alcanza, en total, a cerca de 200.000 libras, a razón de doce onzas comunes por libra; obra dedicada a vuestra feliz y gloriosa memoria paterna y que nada tiene que envidiar a las de FIDIAS y PRAXÍTELES en Monte Cavallo[9] y también el hermoso "simulacro del ardiente deseo de nuestra salvación" en el digno y devoto lugar, de corporal y espiritual confortamiento, [de Santa Maria] delle Grazie, pintado por sus manos, frente al cual los de APELES, MIRÓN, POLICLETO y demás deben hoy ceder, rindiendo tributo a su celebridad. Y no satisfecho con esto, dedicado a la obra inestimable del movimiento local, de las percusiones y pesos y de todas las fuerzas, es decir pesos accidentales —habiendo ya terminado con toda diligencia el digno libro de la pintura y movimientos humanos— con todo cuidado se empeña en llevarla a su debido término. Estuvo también vuestro [querido] —como hermano—, GIACOMO ANDREA DA FERRARA, muy partidario de las obras de VITRUVIO, pero sin ningún menoscabo de su singular arte militar.

Vuestra Alteza, con sus áureas y melifluas palabras, dijo entonces que era digno de toda consideración de Dios y del

mundo aquel que, dotado de alguna virtud, voluntariamente la comunica a los demás, lo cual es, para el prójimo, fuente de caridad, y de alabanza y honor para él, conforme al sagrado dicho: *quod ne sitie figmento didici et sine invidia libenter communico*. Tan firme retuve en la mente el sentido de estas suavísimas palabras, que nunca hubo en mármol inscripción más duradera. Y si antes, por naturaleza, era innato en mí el practicar lo propio con cada cual, máxime respecto de aquellas facultades de las que plugo al Altísimo, en su inmensa benignidad, dotarme a mí entre los demás, es decir, de las necesarias ciencias y dignísimas disciplinas matemáticas, sin embargo, ya agobiado por los laboriosos afanes, nocturnos y diurnos, tanto corporales como espirituales (todo lo cual sabe quien haya abierto con diligencia nuestra gran obra sobre tales disciplinas y facultades, dedicada al magnánimo Duque de Urbino, GUIDO UBALDO, afín de Vuestra Alteza, junto con las otras que se incluyen en su quinta sección), me había ya puesto con los otros, en lugar abierto al sol, a recordar los años transcurridos. Pero, grandemente excitado por aquellas palabras, recobré aliento, en la cuesta desierta, para preparar este breve compendio y útilísimo tratado, llamado *La Divina Proporción*, tanto para fundamentar todas nuestras otras obras compuestas sobre tales facultades como para ofrecer sumo y deleitoso gusto de todas las nombradas ciencias y matemáticas disciplinas a Vuestra Alteza, y para utilidad de sus muy respetuosos súbditos, y también para decoro y ornamento de su dignísima biblioteca, guarnecida de innumerable multitud de volúmenes sobre todas las facultades y doctrinas. Y este compendio, con todas las formas materiales de los cuerpos, que se encuentran en él, no menor admiración despertará en quien visitare aquella biblioteca, que todos los demás volúmenes con todas las demás valiosísimas cosas que en ella se guardan, por haber sido ocultadas, hasta ahora, dichas formas a los vivientes. En él

diremos de cosas altas y sublimes que son, en verdad, prueba y crisol de todas las exquisitas ciencias y disciplinas, pues de él se derivan todas las otras especulativas operaciones científicas, prácticas y mecánicas, sin cuyo conocimiento y presupuesto no es posible, según se demuestra, entender bien ni realizar ninguna de las cosas humanas. Y, por eso, Vuestra Ducal Alteza con avisada inteligencia exhortará a sus familiares y a los otros respetuosos súbditos a leerlo con deleite y sumo placer y con utilísimo fruto. Pues no son fábulas seniles ni otras ridículas y falsas ocurrencias, ni tampoco mendaces e increíbles invenciones poéticas, que engañan nuestros oídos. Y aunque las cosas falsas, según el filósofo, nos son útiles por el conocimiento de las verdaderas que les siguen, así como al reverso el derecho y a cada cosa su opuesto, sin embargo, lo verdadero nos será aún más útil y proficuo, aunque de ello provenga lo no verdadero. Pero de las cosas verdaderas, como afirma justamente AVERROES, nuestras matemáticas son las más verdaderas y están en el primer grado de certeza y a ellas siguen las demás ciencias naturales.

Esto baste, pues, como introducción y argumento de las que aquí siguen. Pero claro está que todas las otras ciencias, oh excelso Duque, son opiniones, y sólo éstas merecen llamarse certezas, puesto que entre los médicos AVICENA, GALENO, HIPÓCRATES y los demás sucede que uno dice que la vida del hombre está en el corazón, otros en el cerebro y otros en la sangre, aduciendo muchas razones y argumentos para su corroboración. Así, nunca es bueno dejar las cosas ciertas por las dudosas, que a éstas llaman vanas los sabios; de ahí el verso: *Non dent certa pro vanis relinqui*. Siempre con humildad y debida reverencia a Vuestra Ducal Alteza, a la cual me recomiendo encarecidamente. *Quae felicissime ad vota valeat*.

CAPÍTULO II

REVERENDI. P. M. LUCAE PACIOLI DE BURGO, S. S. ORDINIS MINORUM, ET SACRAE THEOLOGIAE PROFESSORIS IN COMPENDIUM DE DIVINA PROPORTIONE EX MATHEMATICIS DISCIPLINIS PREFATIO. *Propter admiran ceperunt philosophari*. Sostiene, oh excelso Duque, la reconocida autoridad del *maestro di color che sanno* que el saber tuvo origen en la vista, tal como afirma él mismo en otro lugar, diciendo que *nihil est in intellectu quin prius sit in sensu*; es decir, que nada hay en el intelecto sin que antes se haya ofrecido de algún modo a la sensación. Y entre nuestros sentidos, los sabios concluyen que la vista es el más noble. De ahí que no sin fundamento, además, diga el vulgo que el ojo es la primera puerta a través de la cual el intelecto entiende y gusta.

Como se dice en aquel lugar, viendo los sacerdotes egipcios que la luna se eclipsaba, se quedaron muy admirados y, buscando la causa, encontraron, según ciencia verdadera, que aquello sucedía por la interposición de la tierra entre el sol y la luna, con lo cual quedaron satisfechos. Y de entonces acá sus sucesores, aguzando cada vez más la inteligencia a la luz de sus cinco ventanas, llenaron, para nuestro provecho, con sus profundos conocimientos, innumerable multitud de volúmenes. De tal suerte, así como de una idea surge otra, de aquel hecho nacieron luego muchos otros.

Meditando en ello, decidí tomarme el trabajo de escribir este utilísimo y selecto compendio de las ciencias matemáticas, y junto con él, para bien de todos, dar a sus cuerpos la debida y característica forma material, por mi propia mano, y ofrecerlos junto con este compendio a Vuestra Ducal Alteza. No dudo de que por su inusitado aspecto, como cosa, para nuestros tiempos, venida del cielo, vuestro ágil y perspicaz intelecto encontrará en él grandísimo placer, máxime cuando, con esa luz que dijimos, no con menor empeño que los antiguos egipcios en aquel eclipse, encontrará, con la ayuda del presente tratado, las causas de tales formas y su dulcísima armonía. Por eso, estoy seguro de que si, en el pasado, a quien conociera en parte tales ciencias y disciplinas Vuestra Alteza le ofreció su vasto y amplio apoyo, en el futuro habrá de mostrársele mucho más magnánimo, y amplísimo, y de que con mayor empeño y diligencia exhortará a adquirirlas a sus queridos familiares, respetuosos súbditos y a los demás seres dilectos.

En efecto, dichas ciencias matemáticas son el fundamento y peldaño para llegar al conocimiento de toda otra ciencia, por estar ellas en el primer grado de certeza, tal como lo afirma el filósofo cuando dice: *Mathematicae enim scientiae sunt in primo gradu certitudinis et naturales sequuntur cas*. Están, dice, las ciencias y disciplinas matemáticas en el primer grado de la certeza y a ellas siguen todas las ciencias naturales. Y sin su conocimiento sería imposible entender bien ninguna otra, pues reza además la Sabiduría: *omnia consistunt in numero, pondere et mensura*, es decir que todo lo que está distribuido en el universo inferior y superior está necesariamente sometido a número, peso y medida. Y en estas tres cosas el glorioso AGUSTÍN dice en *De civitate Dei* que el supremo Hacedor recibe altísima alabanza porque en aquéllas *fecit stare ea quae non erant*. Y por esta amorosa exhortación comprendo que muchos que ignoran la utilidad de tal fruto suavísimo habrán de despertar de su sopor y

sueño mental y con todo empeño y solicitud se entregarán por completo a inquirir tales cosas, y habrá en ellas motivo para que en su tiempo se renueve el siglo, y para llegar con mayor verdad y presteza a la perfección en todos sus estudios, de cualquier ciencia. Y además de la fama y digno renombre para Vuestra Ducal Alteza, en su excelso dominio, acrecerá su no poca probidad hacia sus queridos familiares y dilectos súbditos, siempre totalmente dispuestos a defenderlo, no menos de lo que por la propia patria hizo el noble e ingenioso geómetra y dignísimo arquitecto ARQUIMEDES.

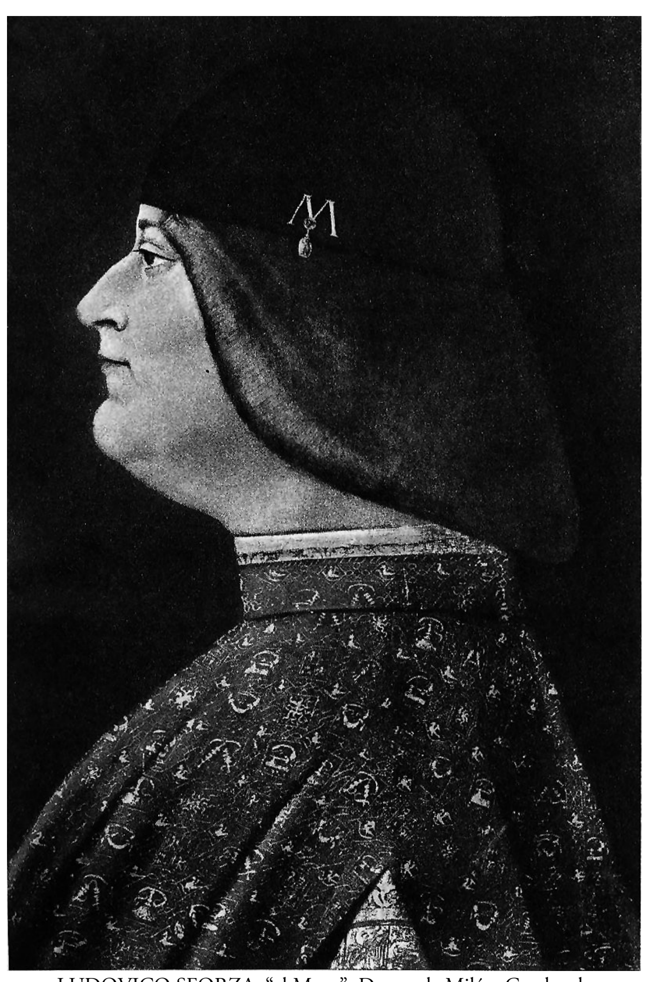
Éste (como está escrito) con sus nuevas y varias invenciones de máquinas, por largo tiempo salvó incólume a la ciudad siracusana contra el ímpetu y belicoso avance de los romanos cuando trataron de expugnarla abiertamente bajo el mando de MARCOS MARCELO. Y por su cotidiana experiencia bien sabe Vuestra Ducal Alteza (pues por muchos años ya su clarísima memoria paterna para toda Italia y ambas Galias, cisalpina y transalpina, ha sido consejero, preceptor y ejemplo) que la defensa de las grandes y pequeñas repúblicas, por otro nombre llamada arte militar, no es posible practicarla con nobleza, honor y utilidad sin el conocimiento de la geometría, aritmética y proporción. Y jamás ningún verdadero ejército, enviado para un asedio o defensa definitivos, podrá decirse equipado de todo, si en él no se encuentran ingenieros y algún nuevo maquinador, especialmente encargado de tales cosas, como poco antes hemos dicho que hizo el gran geómetra ARQUIMEDES en Siracusa.

Bien mirado, en general todas sus artillerías, sean cuales fueren, como bastiones y otros reparos, bombardas, trabucos, manganillas, ronfeas, balistas, catapultas, arietes, testudos, casias, con todas las demás innumerables máquinas, ingenios e instrumentos, siempre se fabrican y disponen a fuerza de números, medida y proporción. ¿Qué otra cosa son ciudadelas, torres, revellines, muros, antemurales, fosos, torreones,

merlones, manteletes y otras fortificaciones en los campos, ciudades y castillos, sino todo geometría y proporciones, con sus debidos niveles y arcos, péndulos, pesados y ajustados? No por otra cosa resultaron tantas veces victoriosos los antiguos romanos, según VEGECIO, FRONTINO y otros ilustres autores escriben, sino por el gran cuidado y diligente preparación de ingenieros y otros jefes de tierra y de mar, cuya suficiencia, sin las disciplinas matemáticas, es decir, la aritmética, la geometría y las proporciones, no hubiera sido posible, como lo demuestran plena y claramente las antiguas historias de LIVIO, DIONISIO, PLINIO y otros, de las cuales RUBERTO VALTURIO[10], peritísimo riminense, sacó todas las que figuran en su digna obra titulada *De instrumentis bellicis*, dedicada al ilustre señor SIGISMONDO PANDOLFO. Y de dichas máquinas e instrumentos, ordenada y fielmente, tal como pone en su libro dicho riminense, y de muchas otras más, la felicísima memoria del pariente y estrecho afín de Vuestra Alteza, FEDERICO FELTRENSE, ilustrísimo Duque de Urbino, hizo adornar, al pie, todo el estupendo edificio de su noble y admirable palacio en Urbino, ciñéndolo con decoración de bella piedra viva, por manos de dignísimos tallistas y escultores. Lo mismo dígase, entre otras cosas, del puente artificial de JULIO CÉSAR, tal como se lee en sus *Commentarii*; y, también hasta hoy, en la digna ciudad tudertina de Umbria, en la iglesia de nuestro santo afortunado y sagrado convento, de la gran multitud de gruesísimas maromas de vuestra clarísima y paterna memoria, pendientes en público, las cuales dispuso, en debida forma para un puente sobre el Tiber, a fin de lograr su famosa victoria.

Asimismo, no por otros medios llega nuestro sutilísimo ESCOTO a las grandes especulaciones de sagrada teología, sino por el conocimiento de las disciplinas matemáticas, según se ve a través de todas sus obras sagradas, máxime si se mira bien la cuestión de su segundo libro de las *Sentencias*, cuando en su

indagación pregunta si el ángel tiene lugar propio para su existencia, en lo cual demuestra claramente haber entendido todo el sublime volumen de nuestro perspicacísimo filósofo megarense[11] EUCLIDES. No por otra cosa, asimismo, todos los textos del príncipe "di color che sanno", *Physica, Metaphysica, Posteriosa*, y los demás, parecen difíciles, sino por la ignorancia de las antedichas disciplinas. Ni por otra cosa hay penuria de buenos astrónomos, sino por el defecto de aritmética, geometría, proporciones y proporcionalidades.



LUDOVICO SFORZA, "el Moro", Duque de Milán. Cuadro de Boltraffio.
Colección Trivulzio, Milán.

Y de diez, nueve, en sus juicios, se rigen por tablas, apuntes y otras cosas calculadas por TOLOMEO, ABULMASAR, ALÍ ALFRAGANO, GEBER, ALFONSO, BIANCO, PRODOCINO y otros, que, por el poco cuidado de los copistas, pueden estar maculadas y viciadas; y, por consiguiente, fiándose en ellas incurren en grandísimos y evidentes errores, con no poco daño y perjuicio de los que confían en ellos. También la sutileza suprema de todas las leyes municipales, según más de una vez me han dicho los peritos en ellas, consiste en juzgar acerca de los aluviones y circunluviones de las aguas, con sus excesivas inundaciones, según el tratado especial que acerca de ellas compuso el eximio hombre de leyes BARTOLO DA SASSO FERRATO, que lo tituló *Tiberina*, y en cuyo proemio alabó a la geometría y a la aritmética, afirmando que a su vez las aprendió de un fraile nuestro, llamado GUIDO, profesor de sagrada teología, en aquel tratado sobre agregación o disgregación de tierras que a veces produce el Tíber con su inundación, máxime en aquellas partes de Perusa hacia donde aminora su curso. En aquel tratado, empleó siempre figuras geométricas rectilíneas y curvilíneas, citando a cada momento a nuestro sagacísimo filósofo EUCLIDES, y concluyó su obra con grandísima sutileza. Nada diré de la dulce y suave armonía, ni de la suma belleza y confortación intelectual de la perspectiva y de la diligentísima disposición de la arquitectura, ni de la descripción del universo marítimo y terrestre, ni de la doctrina de los cuerpos y aspectos celestes, porque lo que de esas materias hasta ahora se ha dicho está claro. Dejo, para no cansar demasiado al lector, otras ciencias muy prácticas y especulativas con todas las artes mecánicas necesarias en las cosas humanas, sin cuya ayuda no es posible lograr éstas ni mantener en ellas el debido orden.

Y así, no nos asombre el que sean pocos en nuestros tiempos los buenos matemáticos, pues es causa de ello la escasez de buenos preceptores, junto con la gula, el sueño y las ociosas

plumas, y en parte la debilidad de los más recientes ingenios. De ahí que entre los sabios, según un proverbio común, hubo costumbre de decir, con gran acierto: *Aurum probatur igni et ingenium matcmaticis*, esto es, que la bondad del oro la demuestra el fuego, y la rara calidad del ingenio las disciplinas matemáticas, con lo cual se quiere decir que el buen ingenio es aptísimo para las matemáticas [……][12], que son de grandísima abstracción y sutileza, porque siempre deben considerarse hermanas de la materia sensible. Y, en verdad, son tales que, como se suele decir en un proverbio toscano, "cortan un pelo en el aire". Por lo cual, no sin razón, el antiguo y divino filósofo PLATÓN negaba a los inexpertos en geometría el acceso a su celebérrimo Gimnasio, sobre cuya puerta principal, hizo poner en grandes y bien legibles caracteres una breve inscripción con estas formales palabras: *Nemo huc geometriae expers ingrediat*. Es decir que quien no fuese buen geómetra no entrara allí. Lo cual hizo porque en ella se encuentra oculta toda otra ciencia. Y lleno de su suavísima dulzura, antes que PLATÓN, el estudiosísimo contemplador de la naturaleza, PITÁGORAS, por el descubrimiento del ángulo recto, según de él se lee, y según cuenta VITRUVIO, con grandísima fiesta y júbilo hizo sacrificio de cien bueyes a los dioses, como más abajo se dirá. Y esto, al presente, valga de recomendación a los matemáticos. El número de éstos empieza a crecer no poco en esta vuestra ínclita ciudad, hoy en día, gracias a Vuestra Ducal Alteza, por la asidua lectura pública que volvisteis a introducir, con provecho de los ilustres oyentes, a quienes en tales materias, conforme a la gracia a mí claramente concedida por el Altísimo, y con toda diligencia (a juicio de ellos), expongo el sublime volumen del ya nombrado EUCLIDES sobre las ciencias de aritmética y geometría, proporciones y proporcionalidades. Y ya he puesto dignísimo fin a sus diez libros, introduciendo en su teoría también nuestra práctica, para mayor utilidad e inteligencia de ellos, y dedicando

al presente desarrollo de este tratado el resto del tiempo.

CAPÍTULO III

TERMINADO EL PROEMIO, CORRESPONDE ACLARAR A CONTINUACIÓN LO QUE POR EL NOMBRE *MATEMATICO* SE DEBE ENTENDER. Este vocablo *matemático*, oh excelso Duque, deriva del griego μαθηματικός, que en nuestro idioma es como decir *disciplinable*, y, para nuestro propósito, por ciencias y disciplinas matemáticas se entienden la aritmética, geometría, astronomía, música, perspectiva, arquitectura y cosmografía, y cualquier otra dependiente de éstas. Sin embargo, los sabios suelen llamar así las cuatro primeras, es decir, aritmética, geometría, astronomía y música, y las otras se llaman subalternas, es decir, dependientes de estas cuatro. Así lo quieren PLATÓN y ARISTÓTELES, e ISIDORO en sus *Ethimologiae*, y SEVERINO BOECIO en su *Arithmetical* Pero nuestro juicio, aunque flaco y bajo, las reduce a tres o a cinco, es decir, a aritmética, geometría y astronomía, excluyendo de ellas la música por las mismas razones por las que ellos excluyen de las cinco a la perspectiva, y agregando esta a las cuatro nombradas por las mismas razones por las que ellos agregan a nuestras tres la música.

Si dicen que la música contenta al oído, que es uno de los sentidos naturales, también la perspectiva contenta a la vista, la cual es tanto más digna cuanto que es la primera puerta del intelecto; si dicen que aquéllas se refieren al número sonoro, y a la medida referida al tiempo de sus prolaciones, también ésta se

refiere al número natural según todas sus definiciones y a la medida de la línea visual. Si aquélla recrea el ánimo con la armonía, también ésta procura gran deleite con la debida distancia y la variedad de los colores. Si aquélla considera sus proporciones armónicas, también ésta considera las aritméticas y geométricas. Y, breviter, oh excelso Duque, y esto hace varios años que se agita en mi mente, tampoco nadie me ha aclarado por qué han de ser cuatro más bien que tres o cinco. Con todo, estimo que tantos sabios no se equivocan. Pero, por más que digan, mi ignorancia no se dasarraiga. ¡Oh Dios! ¿Quién, viendo una airosa figura, bien dispuesta con sus lineamientos debidos, a la que sólo pareciera faltarle el aliento, no la juzgaría más bien cosa divina que humana? Y la pintura imita insuperablemente a la naturaleza. Esto se muestra con toda evidencia a nuestros ojos en el exquisito "simulacro del ardiente deseo de nuestra salvación", en el cual no es posible imaginar a los apóstoles prestando más viva atención al sonido de la voz de la infalible verdad cuando dijo: *unus vestrum me traditurus est*, y donde, con actos y gestos, unos a otros con viva y afligida admiración parece que hablan: tan dignamente con su donosa mano lo dispuso nuestro LIONARDO. Así también se lee en PLINIO, *de picturis*, que ZEUXIS y PARRASIO porfiaron sobre un mismo ejercicio. Desafiando a PARRASIO a pintar, hizo ZEUXIS una cesta de uva con sus pámpanos, que expuesta en público indujo a los pájaros a abalanzarse sobre ella como si fuese verdadera. Y el otro hizo un velo, y habiéndolo expuesto también él en público le dijo ZEUXIS, creyendo que era un velo que cubría su obra hecha en desafío: "quita el velo y deja ver la tuya a todos, como yo hago ver la mía", y así quedó vencido. Porque si él engañó a los pájaros, animales irracionales, PARRASIO engañó a un racional y maestro, si tal vez el gran deleite y el sumo amor por la pintura (aunque ignorante de ella) no me engaña. Y, universalmente, no es gentil espíritu quien no gusta de la pintura, cuando ésta atrae

a sí tanto al animal racional como al irracional. De ahí que, por ahora, si no sobreviene otra cosa, me quedaré con esto: que son tres las principales ciencias y las otras son subalternas; o bien cinco. Si ellos hacen entrar a la música, de ninguna manera me parece que haya que postergar a la perspectiva, puesto que no es menos digna de alabanza. Y estoy seguro de que, por no ser artículo de fe, me será tolerado. Y esto es cuanto a dicho nombre se refiere.

CAPÍTULO IV

DE LAS COSAS QUE EL LECTOR DEBE OBSERVAR PARA INTELIGENCIA DE ESTE TRATADO. ℋ En adelante, para mayor facilidad hay que observar lo siguiente: cuando aduzcamos, según el caso, la primera del primero, la cuarta del segundo, la décima del quinto, la vigésima del sexto, y así sucesivamente hasta el decimoquinto, hay que entender siempre para la primera indicación el número de las conclusiones y para la segunda indicación el número de los libros de nuestro filósofo EUCLIDES, al cual seguimos del todo como guía supremo de estas facultades. Esto es, que al decir "por la quinta del primero" quiere decir "por la quinta conclusión de su primer libro"; y así para los otros libros parciales de su libro total sobre los elementos y primeros principios de aritmética y geometría. Pero cuando la autoridad aducida por nosotros fuere de otra obra suya, o de otro autor, nombraremos esa obra y ese autor.

Usaremos, además, muchos varios caracteres y abreviaturas que en tales facultades se acostumbra usar, máxime para nosotros, tal como se requiere también en todas las demás. Y así la medicina usa los suyos para escrúpulos, onzas, dracmas y manípulos; los plateros y joyeros para granos, dineros y quilates; los astrólogos los suyos para Júpiter, Mercurio, Saturno, Sol, Luna, y así los otros usan los suyos. Y los mercaderes, para liras, sueldos, gruesas y dineros, los usan también por brevedad. Y

esto sólo para evitar la prolijidad de la escritura y también de la lectura, pues de otro modo se llenaría de tinta mucho papel. De modo parecido, nosotros también en las matemáticas, para el álgebra, es decir, práctica especulativa, usamos otros que significan *cosa, censo* y *cubo*, y los demás términos, como se ve en nuestra citada obra. También en este tratado usaremos algunos de ellos, y son los que hemos puesto en la tabla al comienzo. Asimismo, estos nombres: *multiplicación, producto* y *rectángulo* significan la misma cosa; y también éstos: *cuadrado* de una cantidad y *potencia* de alguna cantidad son la misma cosa, pues la potencia de la línea es su cuadrado, por la última[13] del primer libro y [, en efecto,] la mayor potencia[14] de una línea es su cuadrado[15]. Es conveniente, pues, que estas cosas se tengan en cuenta en el curso de nuestra obra, para que no haya equívocos sobre el sentido de las palabras.

CAPÍTULO V

DEL TÍTULO QUE CONVIENE AL PRESENTE TRATADO. Me parece, oh excelso Duque, que el título que conviene a nuestro tratado debe ser *La Divina Proporción*. Y esto por muchas correspondencias que encuentro en nuestra proporción y que en este nuestro utilísimo discurso entendemos que corresponden, por semejanza, a Dios mismo. De ellas, entre otras, será suficiente, para nuestro propósito, considerar cuatro. La primera es que ella es una y nada más que una; y no es posible asignarle otras especies ni diferencias Y esta unidad es el supremo epíteto de Dios mismo, según toda la escuela teológica y también filosófica. La segunda correspondencia es la de la Santa Trinidad. Es decir, así como *in divinis* hay una misma sustancia entre tres personas, Padre, Hijo y Espíritu Santo, de la misma manera una misma proporción de esta suerte siempre se encontrará entre tres términos, y jamás se puede encontrar algo de más o de menos, según se dirá. La tercera correspondencia es que así como Dios, propiamente, no se puede definir, ni puede ser entendido por nosotros con palabras, de igual manera esta nuestra proporción no puede jamás determinarse con número inteligible ni expresarse con cantidad racional alguna sino que siempre es oculta y secreta, y los matemáticos la llaman irracional. La cuarta correspondencia es que, así como Dios jamás puede cambiar, y es todo en todo y está todo en todas partes, de la misma manera nuestra presente proporción

siempre, en toda cantidad continua y discreta, sea grande o pequeña, es la misma y siempre invariable y de ninguna manera puede cambiarse, ni tampoco puede aprehenderla de otro modo el intelecto, según nuestras explicaciones demostrarán. La quinta correspondencia se puede, no sin razón, agregar a las antedichas; es decir, así como Dios confiere el ser a la virtud celeste, con otro nombre llamada quinta esencia, y mediante ella a los cuatro cuerpos simples, es decir, a los cuatro elementos, tierra, agua, aire y fuego, y por medio de éstos confiere el ser a cada una de las otras cosas en la naturaleza, de la misma manera esta nuestra santa proporción da el ser formal (según el antiguo PLATÓN en su *Timeo*) al cielo mismo, atribuyéndole la figura del cuerpo llamado dodecaedro o, de otra manera, cuerpo de doce pentágonos; el cual, como más abajo se mostrará, no es posible formarlo sin nuestra proporción. Y, asimismo, a cada uno de los otros elementos asigna sus formas respectivas, todas distintas entre sí; es decir, al fuego la figura piramidal llamada tetraedro; a la tierra la figura cúbica, llamada hexaedro; al aire la figura llamada octaedro, y al agua la llamada icosaedro. Y estas formas y figuras los sabios declaran que son todos los cuerpos regulares, como de cada una por separado se dirá más abajo. Y luego, mediante éstos, nuestra proporción da forma a otros infinitos cuerpos llamados dependientes. Y no es posible proporcionar entre sí estos cinco cuerpos regulares, ni se comprende que puedan circunscribirse a la esfera sin esa nuestra proporción. Y todo esto se verá más abajo. Bastará señalar esas correspondencias, aunque muchas otras podrían aducirse, para la adecuada denominación del presente tratado.

CAPÍTULO VI

DE SU DIGNA ALABANZA. Esta nuestra proporción, oh excelso Duque, es tan digna de prerrogativa y excelencia como la que más, con respecto a su infinita potencia, puesto que sin su conocimiento muchísimas cosas muy dignas de admiración, ni en filosofía ni en otra ciencia alguna, podrían venir a luz. Y, ciertamente, esto le es concedido como don por la invariable naturaleza de los principios superiores, según dice nuestro gran filósofo CAMPANO, famosísimo matemático, a propósito de la décima del décimocuarto[16] máxime cuando se ve que ella hace armonizar sólidos tan diversos, ya por tamaño, ya por multitud de bases, y también por sus figuras y formas, con cierta irracional sinfonía, según se comprenderá en nuestras explicaciones, y presenta los estupendos efectos de una línea dividida según esa proporción, efectos que verdaderamente deben llamarse no naturales sino divinos. El primero de ellos, para entrar a enumerarlos, es el que sigue [en el próximo capítulo].

CAPÍTULO VII

DEL PRIMER EFECTO DE UNA LÍNEA DIVIDIDA SEGÚN NUESTRA PROPORCIÓN. ❧ Cuando una línea recta se divide según la proporción que tiene el medio y dos extremos (que así, con otro nombre, llaman los sabios a nuestra exquisita proporción), si a su parte mayor se agrega la mitad de toda la línea así proporcionalmente dividida, se seguirá necesariamente que el cuadrado de su conjunto siempre es quíntuplo (es decir, cinco veces mayor) del cuadrado de dicha mitad del total.



Isabella d'Este, esposa de Ludovico el Moro. Detalle del cuadro atribuido a Bernardino de' Conti.
Pinacoteca de Brera, Milán.

Antes de seguir adelante, hay que aclarar cómo debe entenderse e incluirse dicha proporción entre las cantidades y cómo la llaman los más sabios en sus obras. Pues digo que la llaman *proportio habens medium et duo extrema*, es decir, proporción que tiene el medio y dos extremos[17], que es lo que ocurre a todo ternario, pues cualquiera que sea el ternario elegido, tendrá siempre el medio con sus dos extremos, porque nunca se entendería el medio sin ellos. Se enseña a dividir de este modo una cantidad en la vigésimonovena[18] del sexto, habiéndose antes explicado, en la tercera definición del sexto,

cómo debe entenderse tal división. Aunque en el segundo, por la undécima, se muestra cómo se divide la línea por esa misma virtud y fuerza, pero no se hace mención de proporción hasta pasar al quinto; y CAMPANO la considera entre números en la décimosexta del noveno. Y esto en cuanto a su denominación.

CÓMO SE ENTIENDEN SU MEDIO Y SUS EXTREMOS. Entendido cómo se designa nuestra proporción con su nombre particular, queda por aclarar cómo debe entenderse dicho medio y también los extremos en cualquier cantidad, y qué condiciones es necesario que cumplan para que entre ellos se dé dicha divina proporción.

Por esto, hay que saber, como se dice en el quinto, que entre tres términos de un mismo género siempre hay, necesariamente, dos habitudes, es decir proporciones; a saber, una entre el primer término y el segundo, otra entre el segundo y el tercero. *Verbi gratia*: sean tres cantidades del mismo género (que de otra manera no se entiende que haya entre ellos proporción), sea la primera *a* y sea 9 como número; la segunda sea *b* y 6; la tercera *c* y 4. Digo que entre ellas hay dos proporciones, una de *a* y *b*, es decir, del 9 con el 6, la cual, entre las comunes, en nuestra obra llamamos sesquiáltera, y es cuando el término mayor contiene al menor una vez y media, pues el 9 contiene al 6 y además al 3, que es la mitad de 6, y por esto se llama sesquiáltera. Pero como aquí no entendemos hablar de las proporciones en general, por haberlas tratado y aclarado amplia y completamente, junte con las proporcionalidades, en nuestra obra antes citada, por eso no me preocupo en extenderme especialmente sobre ellas, sino que extrema y media razón, todo lo que en común se ha dicho de ellas debe presuponerse con sus definiciones y divisiones. Y sólo sobre esta única proporción será ahora nuestro discurso, porque no encontramos a nadie que la haya tratado antes con tales y tan útiles explicaciones.

Ahora bien, volviendo a nuestro propósito de las tres cantidades, sea, además, de la segunda, *b*, con la tercera, *c*, es decir del 6 con el 4, otra proporción igualmente sesquiáltera. De si éstas son símiles o disímiles no nos preocupamos ahora, pues nuestra intención es sólo aclarar cómo entre tres términos de la misma especie deben darse necesariamente dos proporciones. Digo que, de igual modo, nuestra divina proporción observa las mismas condiciones; es decir que siempre entre sus tres términos, el medio y los dos extremos, invariablemente contiene dos proporciones siempre de una misma denominación. Y esto, para las otras, sean continuas o discontinuas, puede suceder de infinitos modos, pues a veces entre sus tres términos será duplo, otras veces triple, y *sic in ceteris* para todas las especies comunes. Pero entre el medio y los extremos de esta proporción nuestra no es posible que haya variaciones, como se dirá.

De esto, con toda razón, hago la cuarta correspondencia con el Sumo Hacedor, pues debe considerarse, entre las otras proporciones, sin especies u otra diferencia, observando las condiciones de sus definiciones. En esto la podemos asemejar a nuestro Salvador, el cual vino, no para violar la Ley, sino para cumplirla, y, habiéndose hecho hombre entre hombres, se sometió y obedeció a MARÍA y JOSÉ. Así, esta nuestra proporción mandada del cielo se acompaña con las otras en definición y condiciones y no las degrada; al contrario, las magnifica aún más, teniendo el principado de la unidad entre todas las cantidades, indiferentemente, siempre inmutable, como del gran Dios dice nuestro SAN SEVERINO: *Stabilisque manens dat cuncta moveri*. Por esto hay que saber, para poder reconocerla entre las cantidades que se presenten, que siempre entre sus tres términos se la encuentra dispuesta en proporcionalidad continua, de este modo: que el producto del menor extremo por la suma del menor y el medio es igual al cuadrado del medio, y, en consecuencia, por la décima[19] definición del quinto, dicha

suma será necesariamente su extremo mayor; y cuando se encuentren así ordenadas en tres cantidades de cualquier género, se dice que ellas están según la proporción que tiene el medio y dos extremos; su extremo mayor es siempre la suma del menor y el medio, y podemos decir que dicho extremo mayor es toda la cantidad dividida en aquellas dos partes, es decir, extremo menor y medio de ese conjunto de términos. Hay que notar por qué dicha proporción no puede ser racional, y por qué el extremo menor no puede nunca, con respecto al medio, denominarse por número alguno, siendo racional el extremo mayor; pues siempre serán irracionales, como abajo se dirá claramente. Y esto, de la tercera manera, concuerda con Dios, *ut supra*.

CAPÍTULO VIII

CÓMO SE ENTIENDE LA CANTIDAD DIVIDIDA SEGÚN LA PROPORCIÓN QUE TIENE EL MEDIO Y DOS EXTREMOS. Debemos saber que, considerándolo bien, esto de la división de una cantidad según la proporción que tiene el medio y dos extremos quiere decir: hacer de aquella cantidad dos partes desiguales tales que el producto de la menor por toda esa cantidad indivisa sea cuanto el cuadrado de la parte mayor, como por la tercera definición del sexto declara nuestro filósofo. Pero, puesto el caso de que resultara molesto dividir dicha cantidad *según la proporción que tiene el medio y dos extremos*, y se quisiera, en cambio, hacer dos partes tales que el producto de una por toda dicha cantidad sea igual al cuadrado de la otra parte, quien entienda bien y sea experto en el arte deberá reducir la proposición a dicha proporción nuestra, pues de otra manera no puede interpretarse.

Así, a quien se le dijera: “hazme de 10 dos partes tales que, multiplicada una por 10, haga cuanto la otra multiplicada por sí misma”, tratando este caso y otros semejantes, según las indicaciones que hemos dado en la práctica especulativa llamada álgebra, y almucabala por otro nombre, y la regla que sobre este punto damos en dicha obra nuestra, encontrará como solución que una parte, es decir, la menor, es 15 menos raíz de 125 y la otra mayor es raíz de 125 menos 5. Y estas partes, así descritas, son irracionales, y en el arte se llaman residuos, cuyas especies,

según señala nuestro filósofo en la septuagésimonona[20] del décimo, son 6. Y vulgarmente dichas partes se enuncian así: la menor, 15 menos raíz de 125. Y esto significa que, tomada la raíz de 125, que es poco más de 11, y sustraída de 15, quedará poco más de 3, o, digamos, poco menos de 4. Y la mayor se enuncia: raíz de 125 menos 5; y quiere decir que, tomada la raíz de 125, que es poco más de 11, como se dijo, restándole 5, quedaría poco más de 6, o, digamos, poco menos de 7 para dicha parte mayor.

Pero tales operaciones de multiplicar, sumar, sustraer, dividir residuos, binomios y raíces y todas las demás cantidades racionales e irracionales, enteras y quebradas, en todos los modos, por haberlos demostrado cabalmente en la citada obra nuestra, no me preocupo de repetirlas en este tratado, pues sólo se trata de decir cosas nuevas y no las ya dichas y reiteradas.

Dividida así toda cantidad, tendremos siempre tres términos ordenados en la proporcionalidad continua según la cual uno es toda la cantidad así dividida, es decir el extremo mayor, como aquí, en el caso propuesto, 10; el otro es la parte mayor, es decir, el medio, como la raíz de 125 menos 5; y el tercero, la menor, es decir, 15 menos raíz de 125. Entre éstos hay la misma proporción, es decir, del primero al segundo como del segundo al tercero, y así, a la inversa, del tercero al segundo como del segundo al primero. Y tanto da multiplicar el menor, es decir, 15 menos raíz de 125, por el mayor, que es 10, cuanto multiplicar el medio por sí mismo, es decir, raíz de 125 menos 5, pues tanto uno como otro producto da 150 menos raíz de 12.500, tal como busca nuestra proporción. Por esto se dice que 10 está dividido según la proporción que tiene el medio y dos extremos, y su parte mayor es raíz de 125 menos 5, y la menor es 15 menos raíz de 125, siendo necesariamente una y otra irracionales como se prueba por la sexta del decimotercero, y también en la undécima del segundo y en la decimosexta del

noveno.

Y esto es todo lo que se refiere a la cantidad así dividida.

CAPÍTULO IX

QUÉ ES RAÍZ DE UN NÚMERO Y DE OTRA CANTIDAD. Como en nuestra explicación se dará a menudo el caso de nombrar raíces, estimo importante aclarar aquí el asunto, pero sucintamente, pues en nuestra obra se habló de ello con amplitud y en todas sus formas.

Digo, sin embargo, que la raíz de una cantidad es también una cantidad que, multiplicada por sí misma, da aquella cantidad de la cual se dice que es la raíz, y esa multiplicación de la raíz por sí misma se llama cuadrado de dicha raíz. Así como decimos que la raíz de 9 es 3, y la de 16 es 4, y la de 25 es 5, así para los otros, tanto 9 como 16 y 25 se llaman cuadrados. Y con respecto a esto es preciso saber que hay cantidades que no tienen raíz que pueda indicarse exactamente con un número. Así, 10 no tiene ningún número que multiplicado por sí mismo dé justamente el mismo 10, y así 11, 12, 13 y otros semejantes. Por tanto, hay o se originan dos suertes de raíces, una llamada discreta, es decir, racional, y es aquella que se puede designar justamente con un número, como la raíz de 9 es 3; y la otra se llama sorda y es la que no se puede indicar exactamente con un número, como hemos dicho de la raíz de 10 y otros. Y éstas con otro nombre se llaman irracionales, pues todas aquellas cantidades que no se pueden designar exactamente con un número se llaman, en el arte, irracionales, y aquellas que se pueden designar con un número se llaman racionales.

Y baste esto sobre las raíces, para nuestro propósito.

CAPÍTULO X

CONSECUENCIA DEL PRIMER EFECTO CONSIDERADO. Y ahora que hemos considerado bien estas cosas, volvamos al primer efecto a que nos hemos referido y aclarémoslo con ejemplos evidentes.

Para dilucidarlo, volvamos a tomar el mismo caso de 10, aducido en aquel lugar, sin afanarnos especialmente por otras difíciles cantidades, pues en todas sucede lo mismo que lo que se dice para este ejemplo.

Y por medio de la aritmética, para mejor conocimiento de Vuestra Alteza, iremos pasando a todos los demás, presuponiendo siempre que las pruebas científicas de todo lo que aparezca en nuestras explicaciones y que hayamos de aducir de nuestro Euclides están geométricamente determinada con toda diligencia, según lo que en cada caso exigen las conclusiones. Digo, pues, que dividido 10 según nuestra proporción, su parte mayor es raíz de 125 menos 5, y agregándole, por dicha propiedad, 5, es decir la mitad del todo, que es 10, dará raíz de 125 exactamente, pues aquel "menos 5" se compensa y llena con "más 5", mitad de 10. Este conjunto, es decir raíz de 125, que multiplicado por sí mismo da 125, tiene un cuadrado que es 5 veces el cuadrado de la mitad de 10 (que es 5, y su cuadrado 25). Por lo tanto 125 es justamente el quíntuplo de dicho 25, cuadrado de dicha mitad de 10, como se dijo. Y este resultado se cumple con toda cantidad, cualquiera

sea su naturaleza, como lo demuestra claramente la primera del decimotercero de nuestro guía.

CAPÍTULO XI

DE SU SEGUNDO ESENCIAL EFECTO. ☙ Si se divide una cantidad en dos partes y a una de ellas se agrega una cantidad tal que el cuadrado de este conjunto sea quíntuplo del cuadrado de la cantidad añadida, se sigue necesariamente que dicha cantidad añadida es la mitad de la primera cantidad dividida en dichas partes, y que aquella a la cual se añade es su parte mayor, y que toda ella está dividida en tales partes según nuestra proporción.

Verbi gratia: tómese 15 menos raíz de 125 y raíz de 125 menos 5 como las dos partes integrales de una cantidad, y agregado 5 a la una, es decir, raíz de 125 menos 5, como tercera cantidad, el conjunto es raíz de 125, cuyo cuadrado es 125; y el cuadrado de la cantidad añadida es 25. Por lo tanto 125 es quíntuplo de 25, cuadrado de la cantidad añadida. Digo que la raíz de 25, es decir, 5, es la mitad de la primera cantidad dividida en aquellas dos partes, y que aquella a la cual se añadió es la parte mayor de dicha cantidad dividida según nuestra proporción que tiene el medio y dos extremos, es decir, de 10. Y este efecto es recíproco del efecto precedente, tal como concluye geométricamente la segunda del decimotercero[21].

CAPÍTULO XII

DE SU TERCER SINGULAR EFECTO. Si una cantidad se divide según nuestra proporción y si a su parte menor se añade la mitad de la parte mayor, entonces el cuadrado del conjunto será siempre quíntuplo del cuadrado de la mitad de dicha parte mayor.

Verbi gratia: sea 10 la cantidad dividida según nuestra divina proporción, de la cual una parte, a saber, la mayor, será raíz de 125 menos 5 y la menor 15 menos raíz de 125. Digo que si a 15 menos raíz de 125, que es la menor, se añade la mitad de raíz de 25 menos 5, que es la mayor, entonces el conjunto de la menor y de dicha mitad, multiplicado por sí mismo, será 5 veces el cuadrado de la mitad de dicha parte mayor, y así debe ser, pues la mitad de la raíz de 125 menos 5 es raíz de $31\frac{1}{4}$ menos $2\frac{1}{2}$, y agregada a 15 menos raíz de 125, que es la menor, da $12\frac{1}{2}$ menos raíz de $31\frac{1}{4}$; luego, multiplicando $12\frac{1}{2}$ menos raíz de $31\frac{1}{4}$ por $12\frac{1}{2}$ menos raíz de $31\frac{1}{4}$, da $187\frac{1}{2}$ menos raíz de $19.531\frac{1}{4}$, y dígase que éste es el cuadrado del conjunto. Luego elévese también al cuadrado la mitad de dicha parte mayor, es decir, multiplíquese raíz de $31\frac{1}{4}$ menos $2\frac{1}{2}$ por raíz de $31\frac{1}{4}$ menos $2\frac{1}{2}$ y dará $37\frac{1}{2}$ menos raíz de $78\frac{1}{4}$ y dígase que éste es el cuadrado de la mitad de la parte mayor, que es exactamente $\frac{1}{5}$ del cuadrado del conjunto; y por consiguiente dicho cuadrado del conjunto es quíntuplo del cuadrado de la mitad de dicha parte mayor de 10, así dividido. Y esta virtud es de estimar

mucho, junto con las otras, como se prueba todo geométricamente por la tercera del decimotercero de nuestro maestro.

CAPÍTULO XIII

DE SU CUARTO INEFABLE EFECTO. ☙ Si una cantidad se divide según nuestra divina proporción y si a toda dicha cantidad se añade su parte mayor, entonces esa suma y esa parte mayor serán partes de otra cantidad así dividida; y la parte mayor de esta segunda cantidad así dividida será siempre toda la primera cantidad.

Verbi gratia: sea 10 la cantidad dividida según nuestra única proporción, tal que su parte mayor sea raíz de 125 menos 5 y la menor 15 menos raíz de 125. Luego, si a 10, primera cantidad, se agrega raíz de 125 menos 5, parte mayor, dará una segunda cantidad, es decir, raíz de 125 más 5. Y esta segunda cantidad, es decir, raíz de 125 más 5, digo que se divide, de igual modo, según nuestra proporción, en esas dos partes, es decir, en raíz de 125 menos 5, parte mayor de la primera, y en 10, que fue la primera cantidad y es la parte mayor de esta segunda cantidad. Y esto es así, pues el producto de 125 menos 5 (que era la parte mayor de la primera cantidad y ahora es la menor de esta segunda) por toda esta segunda cantidad, es decir, 125 más 5, da cuanto el cuadrado de la media, es decir, la parte mayor de esta segunda, que es 10, pues uno y otro hacen justamente 100, como se requiere para esta proporción. Y esta virtud nos la muestra también, geométricamente, la cuarta[22] del decimotercero.

CAPÍTULO XIV

DE SU QUINTO ADMIRABLE EFECTO. ❧ Si una cantidad se divide según dicha nuestra proporción, la suma del cuadrado de la parte menor más el cuadrado de la cantidad íntegra será siempre triple del cuadrado de la parte mayor.

Verbi gratia: sea 10 la cantidad dividida como hemos dicho, tal que una parte sea 15 menos raíz de 125, es decir, la parte menor, y la otra raíz de 125 menos 5, es decir, la parte mayor. Digo que el cuadrado de 15 menos raíz de 125 más el cuadrado de 10, que es toda la cantidad, darán un conjunto triple (es decir, tres veces mayor) del cuadrado de la parte mayor, es decir, de raíz de 125 menos 5. Luego, el cuadrado de 15 menos raíz de 125 es 350 menos raíz de 112.500, y el cuadrado de 10 es 100, que sumado a 350 menos raíz de 112.500 da 450 menos raíz de 112.500, para dicha suma. Y el cuadrado de raíz de 125 menos 5 es 150 menos raíz de 12.500; esto, como se ve, es ⅓ de dicha suma pues multiplicando por tres 150 menos raíz de 12.500, dará justamente 450 menos raíz de 112.500. Luego, dicha suma es triple de dicho cuadrado, tal como dijimos. Y este efecto lo demuestra geométricamente la quinta[23] del decimotercero.

CAPÍTULO XV

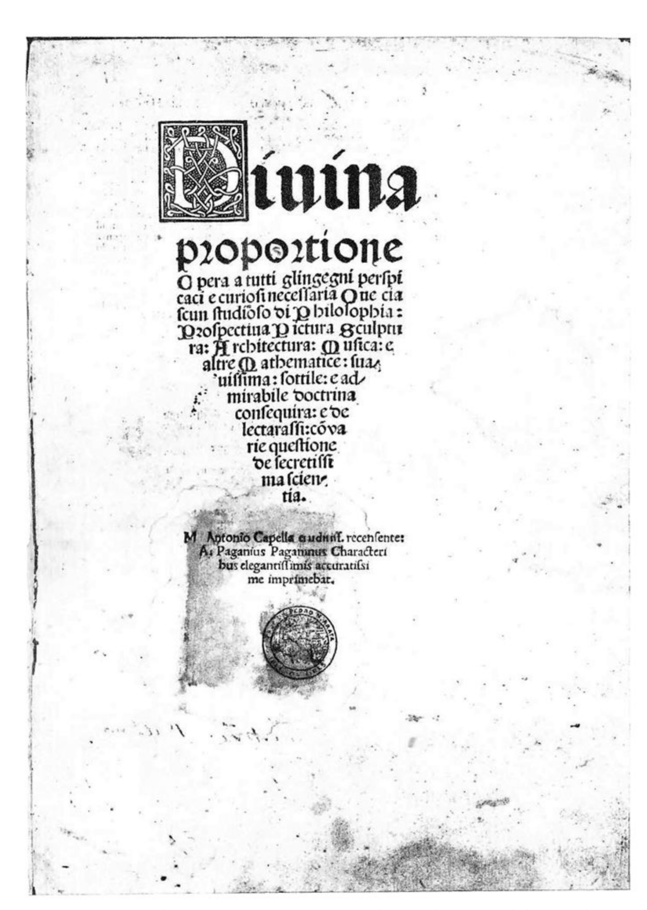
DE SU SEXTO INNOMINABLE EFECTO. Ninguna cantidad racional puede dividirse según nuestra dicha proporción sin que cada una de sus partes sea irracional (y se llama residuo).

Verbi gratia: sea 10 la cantidad que tiene que dividirse según la proporción que tiene el medio y dos extremos. Digo que necesariamente cada una de las partes debe ser residuo. Luego, una será 15 menos raíz de 125, es decir, la menor, y la otra, la mayor, será raíz de 125 menos 5, y se ve por qué cada una de ellas es residuo (que así se llaman en el arte, según la septuagesimanovena[24] del décimo). Y este efecto resulta de la sexta del decimotercero.

CAPÍTULO XVI

DE SU SÉPTIMO INESTIMABLE EFECTO. ℌ Si el lado del hexágono equilátero se añade al lado del decágono equilátero, entendiéndose ambos como inscritos en un mismo círculo, su suma será siempre una cantidad dividida según nuestra proporción, cuya parte mayor será el lado del hexágono.

Verbi gratia: sea raíz de 125 menos 5 el lado de un hexágono equilátero trazado en el círculo y el lado del decágono equilátero en el mismo círculo sea 15 menos raíz de 125. El diámetro de tal círculo será raíz de 500 menos 10. Digo que el conjunto de raíz de 125 menos 5 más 15 menos raíz de 125, que es 10, está dividido según nuestra proporción, y su parte mayor es raíz de 125 menos 5, y la menor 15 menos raíz de 125, como varias veces hemos dicho que se divide 10. Y esto se manifiesta geométricamente por la novena del decimotercero.


Diuina
proportione
Opera a tutti glingegni perſpi
caci e curioſi neceſſaria Oue cia
ſcun ſtudioſo di Philoſophia:
Proſpectiua Pictura Sculptu
ra: Architectura: Muſica: e
altre Mathematice: ſua
uiſſima: ſottile: e ad
mirabile doctrina
conſequira: e de
lectaraſſi: cō va
rie queſtione
de ſecretiſſi
ma ſcien
tia.

M. Antonio Capella eruditiſſ. recenſente:
A. Paganius Paganinus Characteri
bus elegantiſſimis accuratiſſi
me imprimebat.

Frontispicio de *La Divina Proporción*, edición de 1509, del ejemplar utilizado para preparar la edición presente.

CAPÍTULO XVII

DEL OCTAVO EFECTO, RECÍPROCO DEL PRECEDENTE. ✠ Si una línea se divide según la proporción que tiene el medio y dos extremos, la parte mayor es siempre el lado del hexágono de aquel círculo, y la menor es el lado del decágono del mismo círculo.

Verbi gratia: si la línea dividida es 10, su parte mayor, que es raíz de 125 menos 5, será siempre el lado de un hexágono en un círculo cuyo diámetro será el doble de raíz de 125 menos 5, es decir, raíz de 500 menos 10. Digo que, para ese mismo círculo, 15 menos raíz de 125, la parte menor, es el lado del decágono equilátero colocado en aquél. Y de esta recíproca se sirve mucho TOLOMEO en el noveno capítulo de la primera parte de su *Almagesto* para demostrar el número de las cuerdas de los arcos del círculo, como se demuestra también, clara y geométricamente, en la citada novena del decimotercero.

CAPÍTULO XVIII

DE SU NOVENO EFECTO, EL MÁS EXCELSO DE TODOS. Si en el círculo se forma el pentágono equilátero y se trazan dos líneas rectas opuestas a dos de sus ángulos próximos, desde los extremos de sus lados, necesariamente aquéllas se dividirán entre sí según nuestra proporción, y cada una de sus partes mayores será siempre el lado de dicho pentágono.

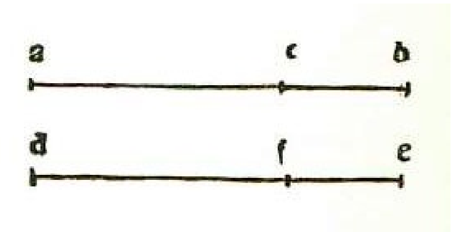
Verbi gratia: sea el pentágono *abcde*; de sus extremos *c* y *a* tírese la cuerda *ac*, opuesta al ángulo *b*; y de los extremos *b* y *e* tírese la otra cuerda *be*, que será opuesta al ángulo *a*. Digo que estas dos líneas *ac* y *be* se dividen entre sí en el punto *f* según la proporción que tiene el medio y dos extremos, y la parte mayor de cada una es exactamente el lado de dicho pentágono. Entonces, de la línea *ac*, la parte mayor es *cf*, y la mayor de la línea *be* es *ef*. Y cada una de éstas es siempre igual al lado de dicho pentágono; y los matemáticos llaman esas dos líneas, con otro nombre, cuerdas del ángulo del pentágono. De tal modo, si dichas cuerdas fueran, cada una, 10, pues serán iguales tratándose de un pentágono equilátero inscrito en el círculo, *cf* sería raíz de 125 menos 5, y *af*, 15 menos raíz de 125, y la parte *ef* sería igualmente raíz de 125 menos 5, y *bf* sería 15 menos raíz de 125, y el lado del pentágono sería igualmente raíz de 125 menos 5. Todo esto lo demuestra geométricamente muy bien la undécima[25] del decimotercero. Y por este efecto podemos,

conociendo el lado, llegar a conocer todas sus cuerdas y todas sus partes. Y así, recíprocamente, conociendo las cuerdas podemos llegar a conocer el lado y las partes de dichas cuerdas, operando aritmética y geométricamente, como hemos enseñado a proceder en nuestra obra arriba citada, con binomios y otras líneas irracionales, de las cuales trata nuestro filósofo en su décimo, y lo demuestra linealmente en la undécima del segundo y en la vigésimonovena[26] del sexto. De tal manera, fácilmente se llega a conocer en todos los modos tanto el uno como el otro, lo cual resulta de grandísima utilidad en nuestras ideas especulativas y científicas.

CAPÍTULO XIX

DE SU DÉCIMO SUPREMO EFECTO. Si una cantidad se divide según la antedicha proporción, todos los efectos que de ella y de sus partes pueden resultar, resultarán también, en habitud, número, especie y género, de cualquier otra cantidad así dividida.

Verbi gratia: sean dos líneas así divididas, es decir, una *ab*, dividida en *c*, y su parte mayor sea *ac*; y la otra *de*, y su parte mayor sea *df*; y lo que decimos de estas dos entendemos decirlo también de infinitas otras, que fácilmente pueden determinarse por medio de la aritmética. Poniendo para *ab* 10, *ac* sería raíz de 125 menos 5 y la otra, 15 menos raíz de 125: y poniendo para *de* 12, *df* sería raíz de 180 menos 6 y la otra sería 18 menos raíz de 180. Digo que todo aquello que puede darse para una de dichas líneas, si se las compone, se las multiplica, se las divide y se opera con ellas en todos los demás modos, se da siempre también en las otras, es decir que la proporción de cada una con respecto a su parte mayor es la misma, como también es la misma la proporción de cada una con respecto a su parte menor. Y así, por la recíproca, sucede para cada una de sus partes con respecto a ellas todas, y así para el producto de cada una por sus partes, y, recíprocamente, para dichas partes, como también para las operaciones



de dividir y sustraer. Luego, la proporción que hay de 10 a su parte mayor, raíz de 125 menos 5, es la misma que hay de 12 a su parte mayor, raíz de 180 menos 6; y la proporción que hay del conjuntode 10 y raíz de 125 menos 5 a raíz de 125 menos 5 es la misma que la del conjunto de 12 y raíz de 180 menos 6 a raíz de 180 menos 6. Y así, *breviter*, tomadas y revueltas al infinito, *quocumque et qualitercumque*, según la proporcionalidad por permutación, inversión, conjunción, disyunción, eversión e igualación, les convendrán siempre una misma denominación y los mismos efectos intensivos, lo cual, infaliblemente, demuestra una grandísima armonía en todas las cantidades así divididas, como abajo se verá en los cuerpos regulares y dependientes. Y todo esto, en sustancia, concluye geométricamente la segunda del decimocuarto.

CAPÍTULO XX

DE SU EXCELENTÍSIMO UNDÉCIMO EFECTO. Si se divide el lado de un hexágono equilátero según nuestra divina proporción, necesariamente su parte mayor será siempre el lado del decágono circunscrito al mismo círculo que el hexágono.

Verbi gratia: si el lado del hexágono es 10 y se divide de dicho modo, su parte mayor será raíz de 125 menos 5, la cual digo que es exactamente el lado del decágono circunscrito al mismo círculo, cuyo diámetro vendría a ser 20; y esto se concluye por la tercera del decimocuarto. Luego, es evidente que, obtenido el lado de uno, fácilmente se encuentra el lado del otro. Así también, obtenido el diámetro del círculo o bien su circunferencia o su área o cualquiera otra parte suya, siempre, por su intermedio, podemos llegar a conocer lo uno a través de lo otro, y así recíprocamente, en todas las formas de círculo, hexágono, decágono y también triángulo, operando aritmética y geométricamente, lo cual es cosa muy útil, como arriba se dijo en el noveno efecto del pentágono.

CAPÍTULO XXI

DE SU DUODÉCIMO CASI INCOMPRENSIBLE EFECTO. Si se divide una cantidad según nuestra dicha proporción, siempre la raíz de la suma del cuadrado de toda la cantidad y del cuadrado de su parte mayor, será, en proporción con la raíz de la suma del cuadrado de dicha cantidad y el cuadrado de su parte menor, como el lado del cubo con respecto al lado del triángulo del cuerpo de veinte bases.

Verbi gratia: sea 10 la cantidad dividida según la proporción que tiene el medio y dos extremos, tal que una parte, es decir la mayor, sea, como varias veces se ha dicho, raíz de 125 menos 5, y la menor 15 menos raíz de 125. Ahora bien, elévese al cuadrado, es decir, multiplíquese por sí misma, dicha cantidad, es decir 10, y dará 100, y además elévese al cuadrado su parte mayor, es decir, raíz de 125 menos 5, la cual, multiplicada por sí misma, dará 150 menos raíz de 12.500, y elévese también al cuadrado la parte menor, es decir 15 menos raíz de 125, que multiplicada por sí misma da 350 menos raíz de 112.500. Ahora, al cuadrado de la parte mayor, es decir a 150 menos raíz de 12.500, agréguese el cuadrado de toda la cantidad, es decir, de 10, que es 100, y dará 250 menos raíz de 12.500; el mismo cuadrado de dicha cantidad, es decir, también 100, agréguese al cuadrado de la parte menor, la cual hemos encontrado que es 350 menos raíz de 112.500, y añadiéndole 100 dará 450 menos raíz de 112.500. Ahora bien, digo que la proporción de la raíz

de una de las sumas, es decir de 150 menos raíz de 12.500, obtenida del cuadrado de dicha cantidad y de su parce mayor, con respecto a la otra suma obtenida del cuadrado de dicha cantidad y de su parte menor, es decir de 450 menos raíz de 112.500, es exactamente como la proporción del lado del cubo con respecto al lado del triángulo del cuerpo de veinte bases, cuando dichos dos cuerpos están circunscritos o circundados, ambos, por una misma esfera, y tales raíces de las sumas se llaman líneas potentes sobre dichas sumas, es decir: raíz de 250 menos raíz de 12.500 quiere decir una cantidad cuya potencia o cuadrado es exactamente dicha suma, y así la raíz de 450 menos raíz de 112.500 quiere decir una cantidad cuya potencia, o cuadrado, es exactamente 450 menos raíz de 112.500. Y a estas raíces los expertos las llaman, con otro nombre, raíces universales o bien raíces ligadas, como se dice en nuestra citada obra, en el tercer tratado de su octava sección, a partir del folio 120 de dicho volumen. Y estas cantidades requieren sutilísima investigación y competen a la práctica especulativa, como profusamente se explica en dicho volumen; y tales cantidades, oh excelso Príncipe, no es posible nombrarlas con denominaciones más bajas. Todo este efecto especulativo se demuestra por la novena del decimocuarto, geométricamente, junto con algunas otras, aducidas en aquel lugar por CAMPANO.

CAPÍTULO XXII

DE SU DECIMOTERCERO DIGNÍSIMO EFECTO. Por su decimotercero efecto no es poco de admirar que sin su ayuda no se pueda nunca formar el pentágono, es decir, la figura de 5 lados iguales, mencionada arriba, en el noveno efecto, y que además mencionaremos luego. Ese pentágono, como se dirá, no es posible formarlo, ni imaginar el cuerpo más noble entre todos los otros regulares, llamado dodecaedro; es decir, cuerpo de doce pentágonos equiláteros y equiángulos, con otro nombre llamado cuerpo de doce bases pentagonales, cuya forma atribuye PLATÓN, como se dirá, a la quinta esencia, es decir al cielo, por convenientísimas razones. De ahí que nuestro filósofo, en el cuarto libro, por la décima, nos enseña a hacer un triángulo de tal condición: es decir, que uno de sus dos ángulos que están en la base sea doble del otro, y esto lo hizo porque, al querer nosotros aprender a formar el pentágono equilátero y equiángulo, y circunscribirlo e inscribirlo en el círculo, es decir, formarlo exactamente dentro y fuera del círculo, no hubiera sido posible si antes él no nos hubiese enseñado a hacer dicho triángulo, como se ve por la undécima y duodécima de dicho cuarto. Y para hacer ese triángulo hay que dividir necesariamente una línea según nuestra divina proporción, como él nos muestra por dicha décima del cuarto; si bien en ese lugar él no dice que la tal línea se divide según dicha proporción ni sus condiciones, por no habernos dado aún noticia de qué es

proporción, lo cual se reserva para su quinto, pues no acostumbra dar en sus demostraciones las cosas que siguen, de las cuales aún no se tenga noticia, sino que sólo usa las antecedentes, y este orden se encuentra en todos sus quince libros. Por tanto, a propósito de dicho triángulo no dice que se divide esa línea según la proporción que tiene el medio y dos extremos, sino que dice que se hagan de ella dos partes tales que el cuadrado de la una sea igual al producto de la otra parte por toda dicha línea, según la undécima del segundo. Esto, virtualmente, no quiere decir otra cosa sino dividirla según dicha proporción, como se ve por la tercera[27] definición del sexto y por la vigesimonovena[28] del mismo libro; y, además, nosotros, más cómo se entienden el medio y sus dos extremos con respecto a su primer efecto indicado.

CAPÍTULO XXIII

CÓMO, POR REVERENCIA A NUESTRA SALVACIÓN, TERMINAN DICHOS EFECTOS. ❧ No me parece oportuno, excelso Duque, extenderme ahora especialmente en sus infinitos efectos, pues el papel no bastaría a la tinta para expresarlos todos, sino que, entre todos, hemos elegido sólo trece, en honor del grupo de doce y de su santísimo jefe, Nuestro Redentor Jesucristo. En efecto, habiéndoseles aplicado el nombre de divinos, se debe también ponerles fin con el número de nuestra salvación, de los tres artículos, y de los doce apóstoles unidos a Nuestro Salvador, a cuyo grupo entiendo que Vuestra Ducal Alteza tiene singular devoción, por haberlo hecho representar por nuestro ya nombrado LIONARDO con donoso pincel en el citado lugar sacratísimo, el templo [de Santa Maria] delle Grazie. No obstante, en las explicaciones que siguen no se dejarán de aducir otros más, según las circunstancias, pues [de otro modo,] como se dirá, no es posible lograr formar ni imaginar la armonía y digna concordancia recíproca de todos los cuerpos regulares y de ellos dependientes, para lo cual hemos adelantado los ya nombrados, para que sus consecuencias resulten más claras.

CAPÍTULO XXIV

CÓMO DICHOS EFECTOS CONCURREN A LA COMPOSICIÓN DE LOS CUERPOS REGULARES Y DEPENDIENTES DE ELLOS. ꟷ Ahora, excelso Duque, la virtud y potencia de nuestra proporción, con sus singulares propiedades, máxime como hemos dicho arriba, se manifiesta en la formación y composición de los cuerpos tanto regulares como dependientes. De éstos, a fin de que se entiendan mejor, hablaremos ordenadamente a continuación; y antes, de los cinco esenciales, los cuales por otro nombre se llaman regulares, y luego, sucesiva y suficientemente, de algunos importantes que dependen de ellos. Pero antes hay que aclarar por qué se llaman cuerpos regulares; en segundo lugar, hay que probar cómo en la naturaleza no es posible formar un sexto cuerpo. Pues bien, dichos cuerpos se llaman regulares porque son de lados, ángulos y bases iguales, y uno está contenido exactamente por el otro, como se mostrará, y corresponden a los cinco cuerpos simples en la naturaleza, a saber, tierra, agua, aire, fuego y quinta esencia, esto es, virtud celeste que sustenta en su ser a todos los demás. Y como estos cinco simples son bastantes y suficientes en la naturaleza, si fuera de otra manera, habría que argüir que Dios habría proveído en demasía o en defecto a la necesidad natural, lo cual es absurdo, como afirma el filósofo, diciendo que Dios y la Naturaleza no obran en vano, es decir, no faltan a la necesidad y no la exceden; lo mismo sucede con las formas de

estos cinco cuerpos, de los cuales hay que decir que son justamente cinco, *ad decorem universi*, y no pueden ser más por lo que seguirá. Por esto, no sin razón, como se dirá abajo, el antiguo PLATÓN, en su *Timeo*, atribuyó las figuras de dichos cuerpos regulares a los cinco cuerpos simples, como se dijo arriba, en la quinta concordancia del nombre divino atribuida a nuestra proporción. Y esto en cuanto a su denominación.

CAPÍTULO XXV

CÓMO NO PUEDE HABER MÁS DE CINCO CUERPOS REGULARES. Conviene ahora mostrar cómo no pueden ser más que cinco, en la naturaleza, tales cuerpos, es decir, cuerpos cuyas bases sean todas iguales entre sí, y de ángulos sólidos y planos iguales y, asimismo, de lados iguales. Así debe ser, pues para la constitución de un ángulo sólido es necesario que concurran por lo menos tres ángulos superficiales, porque un ángulo sólido no puede ser determinado sólo por dos ángulos superficiales. Luego, porque tres ángulos, en todo hexágono equilátero, son iguales a cuatro ángulos rectos, y, además, en el heptágono, figura de siete lados, y en general en toda figura equilátera y también equiángula de más lados, tres ángulos son siempre mayores que cuatro rectos, tal como se ve evidentemente por la trigésimo segunda del primero, mientras que todo ángulo sólido es menor que cuatro ángulos rectos, como testifica la vigesimoprimera del undécimo; por lo tanto es imposible que tres ángulos del hexágono o del heptágono y, en general, de cualquier figura equilátera y también equiángula de más lados formen un ángulo sólido. Y así queda manifiesto que ninguna figura sólida equilátera y de ángulos iguales se puede formar con superficies hexagonales o, desde luego, de más lados; pues, si tres ángulos del hexágono equilátero y equiángulo son mayores que un ángulo sólido, se sigue que cuatro o más, con mucha más razón, excederán dicho ángulo sólido. En cambio,

tres ángulos del pentágono equilátero y equiángulo es manifiesto que son menores que cuatro ángulos rectos, y cuatro son mayores que cuatro rectos. Luego, con tres ángulos de un pentágono equilátero y equiángulo puede formarse el ángulo sólido, pero con cuatro de sus ángulos, o con más, no es posible formar un ángulo sólido. Por esto, un cuerpo se forma, a lo sumo, de pentágonos equiláteros y equiángulos, y los filósofos lo llaman dodecaedro o, de otra manera, cuerpo de doce pentágonos. En éste los ángulos de los pentágonos, en grupos de tres, forman y contienen todos los ángulos sólidos de dicho cuerpo.

La misma razón se da en las figuras cuadriláteras de lados y ángulos iguales, como se ha dicho para los pentágonos, pues toda figura cuadrilátera, si es equilátera y también de ángulos iguales, por definición será cuadrada, porque todos sus ángulos serán rectos, como se muestra por la trigésimo segunda del primero. De ahí, pues, que con tres ángulos de tal figura superficial es posible formar un ángulo sólido, pero con cuatro de ellos, o más, es imposible. Por esto, con tales figuras superficiales, siendo cuadriláteras y de ángulos iguales, se puede formar un sólido, que llamamos cubo y que es un cuerpo contenido por seis superficies cuadradas y tiene doce lados y ocho ángulos sólidos. Ahora bien, en los triángulos equiláteros seis ángulos equivalen a cuatro rectos, por la citada trigésimo segunda del primero; así, pues, menos de seis ángulos valen menos de cuatro rectos, y más de seis ángulos valen más de cuatro rectos; y, por lo tanto, con seis ángulos, o con más, de tales triángulos, no se puede formar un ángulo sólido, pero con cinco, con cuatro y con tres se puede formar. Y como tres ángulos del triángulo equilátero contienen un ángulo sólido, por esto con triángulos equiláteros se forma el cuerpo de cuatro bases triangulares de lados iguales, llamado tetraedro. Y cuando se unen cuatro de tales triángulos se forma el cuerpo de ocho

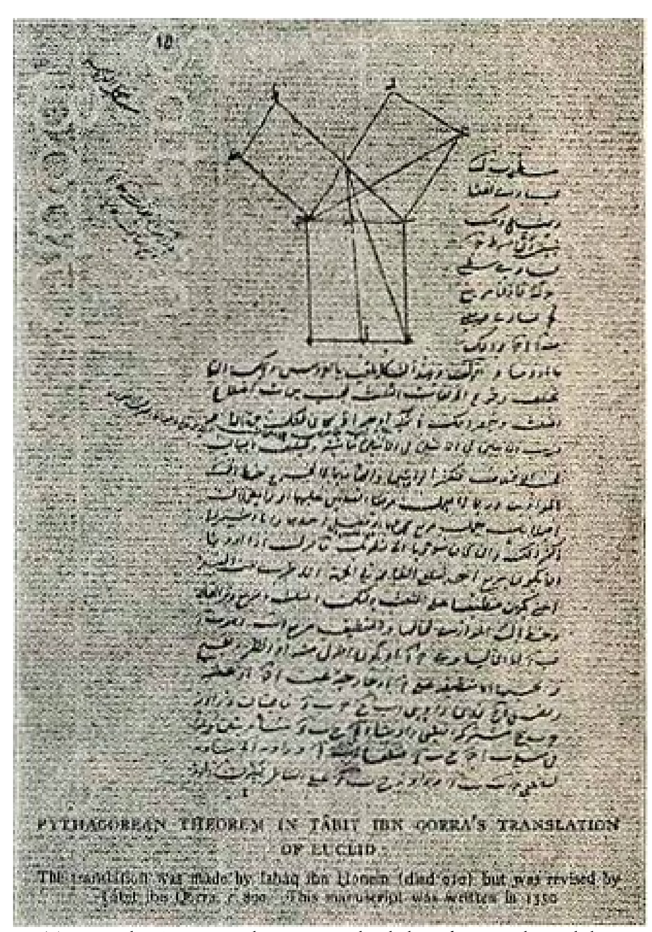
bases llamado octaedro; y si cinco triángulos equiláteros contienen un ángulo sólido, se forma entonces el cuerpo llamado icosaedro, de veinte bases triangulares y de lados iguales. Así, pues, por qué son tantos y tales los cuerpos regulares y, asimismo, por qué no son más, es cosa del todo manifiesta por lo que hemos dicho.



EUCLIDES
(retrato imaginario, tardío).

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Problema de los *Elementos de geometría*, de Euclides, libro II, prop. 11, donde se trata por primera vez de "la divina proporción". El enunciado del problema de éste: "Dada una recta, cortarla en forma tal que el cuadrilongo o rectángulo formado con la recta entera y una de las secciones sea igual al cuadrado formado con la sección restante".



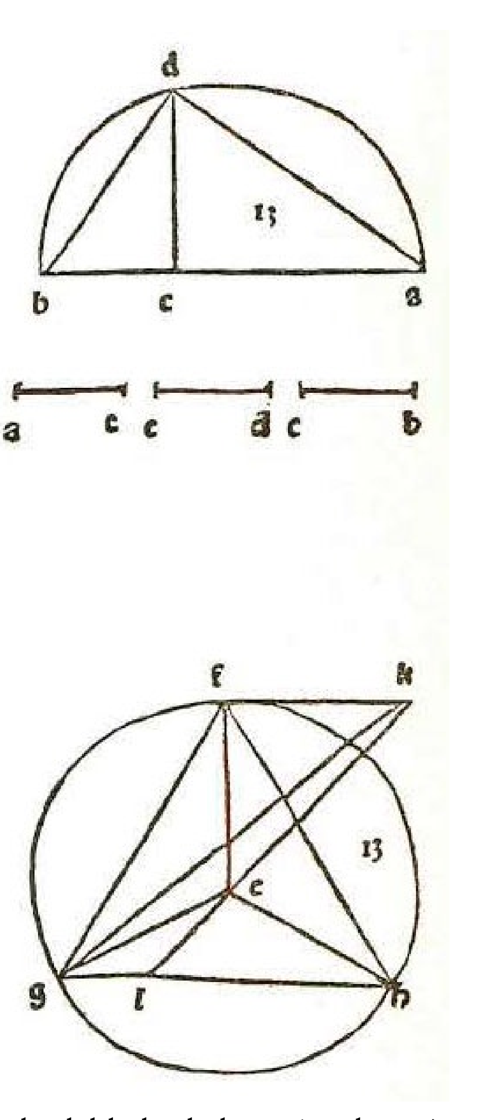
Teorema de Pítágoras en la versión árabe de los *Elementos* de Euclides, debida a Ishâq ibn Hunein V (m. 910) y revisada por Tâbit Qurra (Manuscrito del año 1350).

CAPÍTULO XXVI

DE FABRICA SEU FORMATIONE EORUM QUINQUE REGULARIUM ET DE PROPORTIONE CUIUSQUE AD DIAMETRUM SPHAERAE ET PRIMO DE TETRACEDRON. Visto y entendido cuáles y cuántos son, exactamente, los cuerpos regulares, hay que decir ahora cómo se forman para que sean circunscritos exactamente por una esfera, y, además, qué proporción y denominación tienen ellos o sus lados, con respecto al diámetro de la esfera que los circunscriba, mediante lo cual se llega a conocerlos todos. Y por esto, trataremos primero del tetraedro, es decir del cuerpo de cuatro bases triangulares, equiláteras, y luego se hablará de cada uno de los otros, sucesivamente y por orden.

Digo, pues, que ese cuerpo debe formarse así: tómese primero el diámetro de la esfera en que nos proponemos colocarlo, el cual establecemos que sea la línea *ab*, y divídase ésta en el punto *c*, de manera que la parte *ac* sea doble de la parte *be*, y trácese sobre ella la semicircunferencia *adb* y tírese la línea *cd* perpendicular a la línea *ab*; tírense, además, las líneas *bd* y *da*. Luego trácese el círculo *fgh* por el centro *e*, con un semidiámetro igual a la línea *cd*. En este círculo, constrúyase luego un triángulo equilátero, según lo que enseña la segunda del cuarto; y este triángulo sea *fgh*, y del centro a sus ángulos tírense las líneas *ef*, *eg*, *eh*. Luego, sobre el centro *e* levántese la línea *ek*, perpendicular a la superficie del círculo *fgh*, como enseña la

duodécima del undécimo, y esta perpendicular hágasela igual a la línea *ac*, y desde el punto *k* déjense caer las hipotenusas[29] *kg kh*. Y, una vez observadas exactamente estas cosas, digo que está determinada la pirámide de cuatro bases triangulares de lados iguales; y ésta estará circunscrita exactamente por la esfera de aquel diámetro *ab*. Y digo, para la proporción entre el diámetro de la esfera y el lado de la pirámide construida, que el cuadrado de dicho diámetro es sesquiáltero con respecto al cuadrado del lado de dicha pirámide, es decir que el cuadrado del diámetro contiene al cuadrado del lado de la pirámide una vez y media, es decir como 3 con respecto a 2 y 6 a 4; y quiere decir que, si el cuadrado de dicho diámetro fuera 6, el cuadrado del lado de la pirámide sería 4. Y así se prueba en geometría.



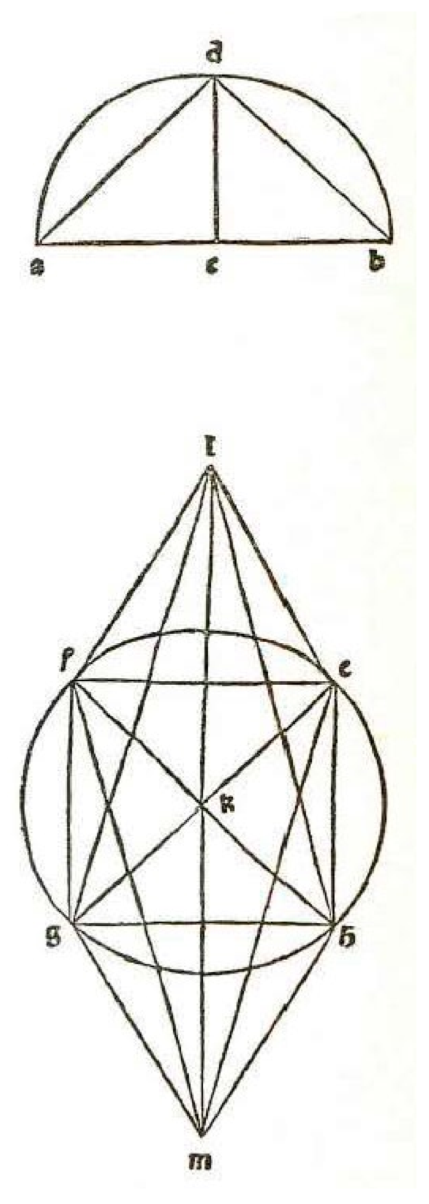
CAPÍTULO XXVII

DE LA CONSTRUCCIÓN DEL CUBO Y SU PROPORCIÓN CON RESPECTO A LA ESFERA. Hay que demostrar, a continuación, cómo se forma el cubo y cuál es la proporción entre su lado y el diámetro de la esfera que lo circunscribe exactamente. Para esto, digo que dicho cubo debe formarse así: tómese el diámetro de la esfera en que nos proponemos colocarlo exactamente, y sea éste la línea *ab*, sobre la cual trazaré el semicírculo *adb*[30]. Luego dividiré el diámetro en el punto *c*, tal como hice para la formación de la pirámide precedente, es decir, de manera que la parte *ac* sea doble de la parte *be*. Tírese la línea *cd*, perpendicular a la línea *ab*, y tírense, además, las líneas *db* y *da*. Hágase luego un cuadrado cuyos lados sean iguales a la línea *bd* y sea ese cuadrado *efgh*, y sobre sus ángulos levántense cuatro líneas perpendiculares a la superficie de dicho cuadrado, como enseña la duodécima del undécimo, y estas perpendiculares tómeselas también todas iguales a la línea *bd* y sean esas cuatro perpendiculares *ek, fl*, *gm*, *hn*. Estas cuatro perpendiculares serán todas equidistantes entre sí, por la sexta del undécimo. Y los ángulos contenidos por aquéllas y por los lados del cuadrado son rectos por la definición de la línea perpendicular a la superficie. Luego, únanse los extremos de estas perpendiculares tirando las líneas *kl, lm, mn, nk*. Y una vez observadas justa y diligentemente estas cosas, estará terminado el cubo que tratábamos de formar, contenido

por seis superficies, lo cual se prueba por la trigésimo cuarta del primero. Las cuatro superficies que lo circundan, y son aquellas cuyos lados opuestos son las cuatro perpendiculares, son todas cuadradas. Que la base es cuadrada resulta de nuestra hipótesis, y, además, que la superficie superior, es decir *klmn*, es también cuadrada, se demuestra asimismo por dicha trigésima cuarta del primero y por la décima del undécimo. Además, por la cuarta del undécimo se demuestra que todos los lados de dicho cubo están dispuestos ortogonalmente respecto de sus dos superficies opuestas. Y este cubo estará circunscrito exactamente por la esfera del diámetro propuesto. Por tanto, dicho diámetro será siempre triple, en la potencia, respecto del lado de dicho cubo, es decir que el cuadrado de dicho diámetro será tres veces el cuadrado del lado del cubo. De manera que si el diámetro fuese raíz de 300, el lado del cubo debería ser exactamente 10. Y este conocimiento, necesario para muchos casos, es oportuno.

CAPÍTULO XXVIII

CÓMO SE FORMA EL OCTAEDRO QUE SE PUEDA COLOCAR EXACTAMENTE EN UNA ESFERA, Y SU PROPORCIÓN CON LA ESFERA. ⁜ En tercer lugar viene la construcción del cuerpo de ocho bases triangulares llamado octaedro, tal que sea circunscrito exactamente por una esfera propuesta, de la cual sólo conozcamos el diámetro. Y se hace de este modo. Tómese el diámetro de la esfera y sea éste la línea *ab*; divídasela en partes iguales en el punto *c*, y sobre toda la línea trácese la semicircunferencia *adb*, y tírese *cd*, perpendicular a la línea *ab*; luego únase el punto *d* con los extremos de dicho diámetro, es decir con *a* y con *b*. Luego hágase un cuadrado cuyos lados sean todos iguales a la línea *bd*, y sea este cuadrado *efgh*, y en este cuadrado tírense dos diámetros de los cuales uno sea *eg* y el otro *fh*. Éstos se dividen entre sí en el punto luego, por la cuarta del primero es manifiesto que cada uno de estos diámetros es igual a la línea *ab*, que se había fijado como diámetro de la esfera, pues el ángulo *d* es recto por la primera parte de la trigésima[31] del tercero. Además, cada uno de los ángulos *e*, *f*, *g*, *h* es recto por la definición del cuadrado, y también es manifiesto que aquellos



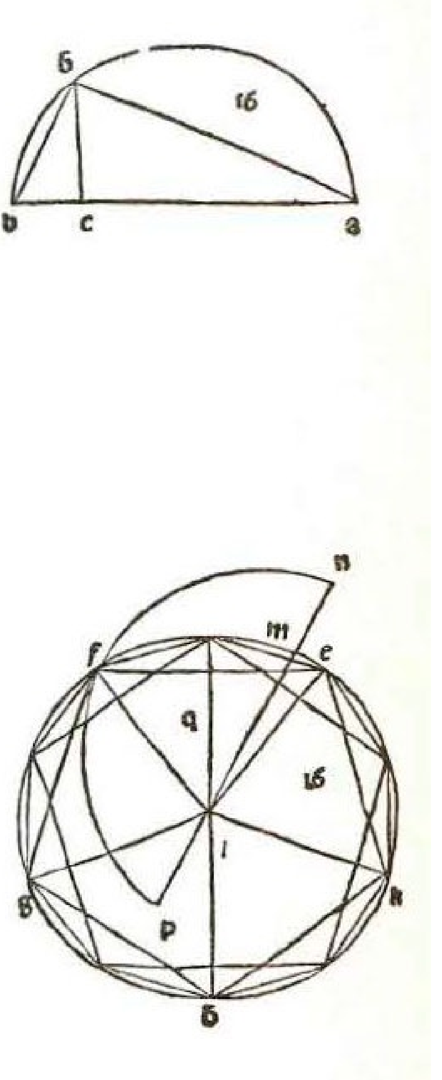
dos diámetros *eg* y *fh* se dividen entre sí en partes iguales en el punto y se ve fácilmente por la quinta, trigésimo segunda y sexta del primero, por deducción. Ahora, levántese sobre *k* la línea *kl*, perpendicular a la superficie del cuadrado, y esta perpendicular tómesela igual a la mitad del diámetro *eg* o *fh*, y luego déjense caer las hipotenusas *le, lf, lg, lh*, y todas estas hipotenusas, por lo dicho y presupuesto, conforme a la penúltima del primero, que repetimos cuantas veces sea necesario, serán iguales entre sí, y también iguales a los lados del cuadrado. Tenemos, pues, hasta aquí, una pirámide de cuatro bases triangulares de lados iguales construida sobre dicho cuadrado, y esta pirámide es la mitad del cuerpo de ocho bases que buscamos. Luego, bajo dicho cuadrado haremos otra pirámide semejante a ésta, del siguiente modo: prolongaremos dicha línea *lk*, perforando y atravesando dicho cuadrado, hasta el punto *m*, de modo que la línea *km*, que está debajo del cuadrado, sea igual a la línea *lk*, que está arriba. Luego uniré el punto *m* con todos los ángulos del cuadrado, tirando otras cuatro líneas, hipotenusas, las cuales son *me, mf, mg, mh*, y también éstas se prueba que son iguales entre sí, como lo son a los lados de dicho cuadrado, conforme a la penúltima del primero y las otras ya citadas, según se probó para las otras hipotenusas sobre el cuadrado. Y así observadas, siempre con diligencia, las cosas antedichas, estará terminado el cuerpo de ocho bases triangulares de lados iguales, el cual estará exactamente circunscrito por la esfera. La proporción entre la esfera y dicho cuerpo es que el cuadrado del diámetro de la esfera con respecto al cuadrado del lado de dicho cuerpo es exactamente el doble, es decir que si dicho diámetro fuese 8, el lado del cuerpo de ocho bases sería raíz de 32, cuyas potencias entre sí están en doble proporción, es decir que el cuadrado del diámetro es doble del cuadrado del lado de dicho cuerpo. Y así tenemos su construcción y su proporción con respecto a la esfera.

CAPÍTULO XXIX

DE LA CONSTRUCCIÓN Y FORMACIÓN DEL CUERPO LLAMADO *EICOSAEDRON*. Veamos cómo construir el cuerpo de veinte caras triangulares equiláteras que sea circunscrito exactamente por una esfera determinada que tenga diámetro racional. El lado de dicho cuerpo será evidentemente una línea irracional, es decir, la llamada línea menor.

Verbi gratia: sea, también aquí, el diámetro de la esfera dada, y supóngase que es irracional, o en longitud o sólo en su potencia, y divídase en el punto *c*, de modo que *ac* sea cuádruple de *cb*, y hágase sobre ella el semicírculo *adb*; tírese *cd* perpendicular a *ab* y tírese *db*. Luego según la cantidad de la línea *db* trácese el círculo *efghfk* sobre el centro *l*, e inscríbase en él un pentágono equilátero señalado con las mismas letras. A sus ángulos, y desde el centro *l*, llévense las líneas *le, lf, lg, lh, lk*. En el mismo círculo se construirá también un decágono equilátero. Divídanse ahora en partes iguales todos los arcos, cuyas cuerdas son los lados del pentágono, y de los puntos medios a los extremos de todos los lados del pentágono inscrito levántense las líneas rectas, y además sobre todos los ángulos de dicho pentágono levántese el cateto[32], como enseña la duodécima del undécimo, y cada uno de éstos sea también igual a la línea *bd*. Únanse los extremos de estos cinco catetos con cinco coraustos[33], y, por la sexta del undécimo, los catetos así levantados serán equidistantes[34] entre sí, y puesto que ellos son

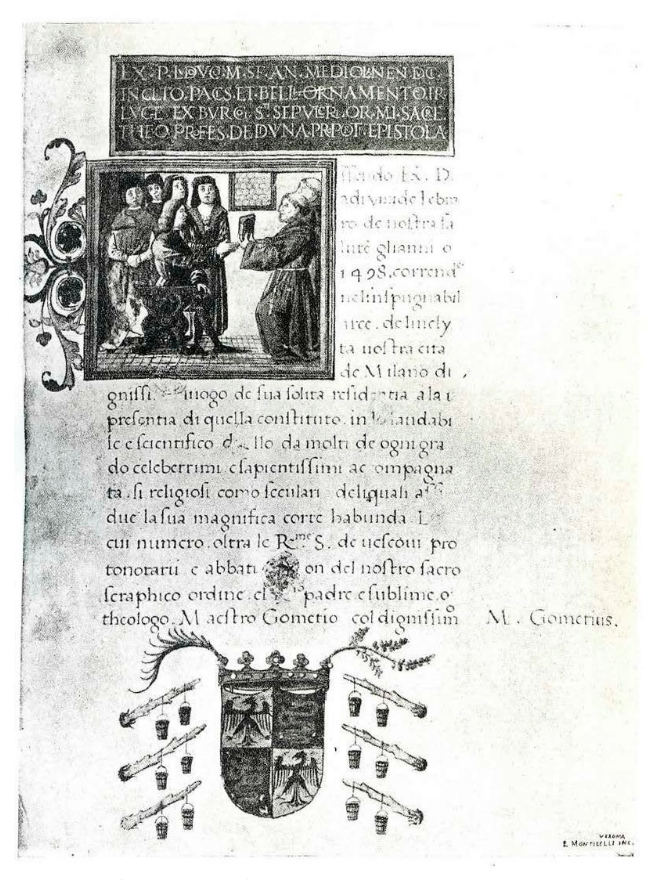
iguales, por la trigésimo tercera del primero, también los cinco coraustos que unen sus extremos serán iguales a los lados del pentágono. Deja, pues, caer, desde cada extremo de los catetos, dos hipotenusas a los dos ángulos circunstantes del decágono inscrito, y los extremos de estas diez hipotenusas que descienden de los cinco extremos de los catetos a los cinco puntos que son, cada uno, ángulos intermedios del decágono inscrito, únelos formando en ese círculo, otro pentágono, el cual también será equilátero, por la vigesimotercera del tercero. Y cuando hayas hecho esto, verás que habrás construido diez triángulos cuyos lados son las diez hipotenusas, los cinco coraustos y los cinco lados de este pentágono inscrito. Y que estos triángulos son equiláteros lo comprobarás así: tanto el semidiámetro del círculo descrito como cada uno de los catetos levantados serán iguales a la línea *bd*, por la hipótesis, y, por el corolario de la decimoquinta del cuarto, cada uno de los catetos será igual al lado del hexágono equilátero hecho en el círculo cuyo diámetro es igual a la línea *bd*; y, como, por la penúltima del primero, cada una de las diez hipotenusas tiene una potencia mayor que la del cateto tanto cuanto es la



potencia del lado del decágono y, por la décima del decimotercero, también el lado del pentágono tiene una potencia mayor que la del cateto tanto cuanto es la potencia del mismo lado del decágono, cada una de estas hipotenusas será, según la ciencia común, igual al lado del pentágono. En cuanto a los coraustos, ya se demostró que ellos son iguales a los lados del pentágono. De ahí que todos los lados de estos diez triángulos o bien son lados del pentágono equilátero inscrito en el círculo, la segunda vez, o bien son iguales a ellos. Dichos triángulos son, pues, equiláteros. Y ahora, más aún: sobre el centro del círculo, que es *l*, levanta otro cateto igual a los primeros, y sea éste *lm*; y su extremo superior (que es el punto *m*) únelo a cada extremo de los primeros, con cinco coraustos y, por la sexta del undécimo, este cateto central, es decir, levantado en el centro, será equidistante a cada uno de los catetos angulares. Y por esto, por la trigésimo tercera del primero, estos cinco coraustos serán iguales al semidiámetro del círculo y, por el corolario de la decimoquinta del cuarto, cada uno será como el lado del hexágono. Ahora bien, a dicho cateto central, de una y otra parte, añádase una línea igual al lado del decágono, es decir, por encima añádasele hacia arriba *mn*, y debajo del círculo añádasele hacia abajo, desde el centro del círculo, *lp*. Luego déjense caer desde el punto *n* cinco hipotenusas a los cinco ángulos superiores de los diez triángulos que están alrededor, en círculo, y desde el punto *p* otras cinco a los otros cinco ángulos inferiores. Estas diez hipotenusas serán iguales entre sí, e iguales a los lados del pentágono inscrito, por la penúltima del primero y por la décima del decimotercero, tal como, para las otras diez, se demostró antes. Tienes, pues, el cuerpo de veinte bases triangulares y equiláteras, cuyos lados son todos iguales a los lados del pentágono, y su diámetro es la línea *np*. De estos veinte triángulos, diez están encima del círculo y cinco se elevan hacia arriba, concurriendo en el punto *n*; y los otros cinco,

debajo del círculo, concurren en el punto *p*. Y, así, que este cuerpo llamado icosaedro está formado de tal manera que la esfera dada lo circunscribe exactamente es cosa manifiesta. Puesto que la línea *lm* es igual al lado del hexágono, y la línea *mn* al lado del decágono, los cuales son equiláteros, circunscritos ambos por el mismo círculo *efg*, toda la línea *ln* se divide entonces, por la novena del decimotercero, según la proporción que tiene el medio y dos extremos, en el punto *m*, y su parte mayor será la línea *lm*. Divídase, pues, *lm* en partes iguales por el punto *q*, y, según la ciencia común, *pq* será igual a *qn*, ya que hemos supuesto que *pl* era igual al lado del decágono, así como *mn*; luego *qn* es ½ de *np*, así como *qm* es la mitad de *ml*. Entonces, puesto que el cuadrado de *qn* es, por la tercera del decimotercero, quíntuplo del cuadrado de *qm*, el cuadrado de *pn* será también, por la decimoquinta del quinto, quíntuplo del cuadrado de *lm*, pues por la cuarta del segundo, el cuadrado de *pn* es cuádruplo del cuadrado de *qn*, y también el cuadrado de *lm* es cuádruplo del cuadrado de *qm*, por la misma. Y el cuádruplo es al cuádruplo como el simple es al simple, según afirma la decimoquinta del quinto[35]. También el cuadrado de *ab* es quíntuplo del cuadrado de *bd* por la segunda parte del corolario de la octava del sexto, y por el corolario de la décimoséptima[36] del mismo, pues también *ab* es quíntupla de *be*, puesto que hice *ac* cuádrupla de ésta. Así, pues, como *lm* es por hipótesis igual a *bd*, será, según la ciencia común, *ab* igual a *np*. Luego, si sobre la línea *np* se traza el semicírculo, y se lleva en torno hasta que vuelva al primer lugar desde donde empezó a moverse, aquella esfera que se forma con su movimiento (por la definición de las esferas iguales) será igual a la esfera propuesta. Y como la línea *lm* ocupará el lugar de media proporcional entre *ln* y *nm*, y por tanto entre *ln* y *lp*, también cada semidiámetro del círculo ocupará el lugar de media proporcional entre *ln* y *lp*, puesto que *lm* es igual al semidiámetro del círculo. Luego el

semicírculo descrito sobre *pn* pasará por todos los puntos de la circunferencia del círculo *efg*, y por lo tanto también por todos los ángulos del sólido construido, los cuales están en aquella circunferencia.


EX. P. LVDVC. M. SF. AN. MEDIOL. NEN. DVC.
INCLITO. PACS. ET. BELL. ORNAMENTO. IR.
LVCE. EX BVRG. S. SEPVLCR. OR. MI. SACE.
THEO. PROFES. DE DVNA. PROPOT. EPISTOLA

[illegible]sendo Ex. D.
adi viii de febra
ro de nostra sa
lute glianni o
1498, correndo
nel inspugnabil
arce. de lincly
ta nostra cita
de Milano di
gnissi. [illegible] luogo de sua solita residentia a la
presentia di quella constituto. in [illegible] laudabi
le e scientifico d[illegible]llo da molti de ogni gra
do celeberrimi e sapientissimi acompagna
ta. si religiosi como seculari de liquali a[illegible]
due la sua magnifica corte habunda [illegible]
cui numero. oltra le R.me S. de vescovi pro
tonotarii e abbati [illegible] on del nostro sacro
seraphico ordine el [illegible] padre e sublime o
theologo. Maestro Gometio col dignissim[illegible]
M. Gomerius.

Página del manuscrito de *La Divina Proporción* que se conserva en la Biblioteca Pública de Ginebra.

Y como, por la misma razón, todos los coraustos (que unen los extremos de los catetos angulares con el extremo del central) ocupan el lugar de media proporcional entre *pm* y *mn*, puesto que cada uno de ellos es igual a *lm*, se sigue que el mismo semicírculo pasa también por los otros ángulos de la figura icosaédrica así construida. Este cuerpo, pues, es inscribible en la esfera cuyo diámetro sea *pn*, y, por lo tanto, también en la esfera

cuyo diámetro sea *ab*. Y el lado de esta figura sólida digo que es la línea menor, pues es manifiesto que la línea *bd* es racional en la potencia puesto que su cuadrado es un quinto del cuadrado de la línea *ab*, que hemos supuesto racional en longitud o bien sólo en la potencia. Luego el semidiámetro (y los semidiámetros) del círculo *efg* es también racional en la potencia, pues tal semidiámetro es igual a *bd*. Entonces, por la duodécima[37] del decimotercero, el lado del pentágono equilátero inscrito en este círculo es la línea menor. Y también, tal como se demostró en el curso de esta demostración, el lado de esta figura es igual al lado del pentágono. Luego el lado de esta figura de veinte bases triangulares equiláteras es la línea menor, tal como se presupuso.

CAPÍTULO XXX

[DE CÓMO CONSTRUIR EL MUY NOBLE CUERPO REGULAR LLAMADO *DODECAEDRON*][38]. Veamos cómo construir el cuerpo de doce bases pentagonales equiláteras y equiángulas, tal que lo circunscriba exactamente la esfera propuesta. El lado de dicho cuerpo será, manifiestamente, irracional, y se llama residuo.

Hágase un cubo, según enseña el procedimiento indicado, tal que la esfera dada lo circunscriba exactamente, y sean de este cubo las superficies *ab* y *ac*, e imaginemos ahora que *ab* sea su superficie superior y la superficie *ac* sea una de las superficies laterales, y sea la línea *ad* común a estas dos superficies. Divídanse, pues, en la superficie *ab* los dos lados opuestos, en partes iguales, es decir *db* y el lado a él opuesto, y los puntos de división únanse con la línea *ef*. También el lado *ad* y el que le es opuesto, en la superficie *ac*, divídanse por partes iguales y los puntos de división únanse con una línea recta cuya mitad sea *gh* y sea el punto *h* el punto medio de la línea *ad*. De manera semejante, divídase la línea *ef* en partes iguales por el punto *k* y tírese *hk*. Entonces, cada una de las tres líneas, *ek, kf*, y *gh*, la dividirás según la proporción que tiene el medio y dos extremos en los tres puntos *l*, *m, q*, y sean sus partes mayores *lk, km*, y *gq*, las que manifiestamente serán iguales, pues todas las líneas divididas son iguales, debido a que cada una de ellas es igual a la mitad del lado del cubo. Luego, desde los dos puntos *l* y *m*

levanta las perpendiculares (como enseña la duodécima del undécimo) a la superficie *ab*, cada una de las cuales tomarás igual a la línea *kl*, y sean éstas *ln* y *mp*. De igual modo, desde el punto *q* levanta, perpendicularmente a la superficie *ac, qr*, que tomarás igual a *gq*. Tira, pues las líneas *al, an, am, ap, dm, dp, dl, dn, ar, aq, dr*, *dq*. Es manifiesto, entonces, por la quinta del decimotercero, que las dos líneas *ke* y *el* son, en la potencia[39], triples de la línea *kl*; y, por tanto, también de la línea *ln*, puesto que *kl* y *ln* son iguales. Además, *ke* es igual a *ea*; entonces las dos líneas *ae* y *el* son, en la potencia, triples de la línea *ln*. Luego, por la penúltima del primero, *al* es, en la potencia, triple de *ln*, y, por tanto, por la misma, *an* es, en la potencia, cuádruple de *ln*; y puesto que toda línea, en la potencia, es cuádruple de su mitad, se sigue, por la ciencia común, que *an* es doble en longitud con respecto a *in*. Y como *lm* es doble de *kl*, y también *kl* y *ln* son iguales, *an* será igual a *lm*, puesto que sus mitades son iguales. Y como por la trigésima tercera del primero *lm* es igual a *np, an* será igual a *np*. De la misma manera probarás que las tres líneas *pd, dr* y *ra* son iguales a ellas y a las dos que dijimos antes. Tenemos, pues, con estas cinco líneas, el pentágono equilátero, que es *anpdr*. Pero tal vez digas que no es pentágono, porque acaso no está todo en una misma superficie, lo cual es necesario para que sea pentágono. Ahora bien, podrás comprobar que está todo en una superficie de la siguiente manera: salga desde el punto *k* la línea *ks* perpendicular a la superficie *ab* e igual a *lk*. Esta línea será, por lo tanto, igual a cada una de las dos líneas *ln* y *mp*. Y como es equidistante a cada una de ellas, por la sexta del undécimo, y por consiguiente está en la misma superficie que las dos, por definición de líneas equidistantes, el punto *s* estará necesariamente en la línea *np*, dividiéndola en partes iguales. Trácense, pues, las dos líneas *rh* y *hs*. Tendremos, así, que los dos triángulos *ksh* y *qrh* están sobre un ángulo (a saber, *khq*); y la proporción de *kh* con respecto a *qr* será como la proporción

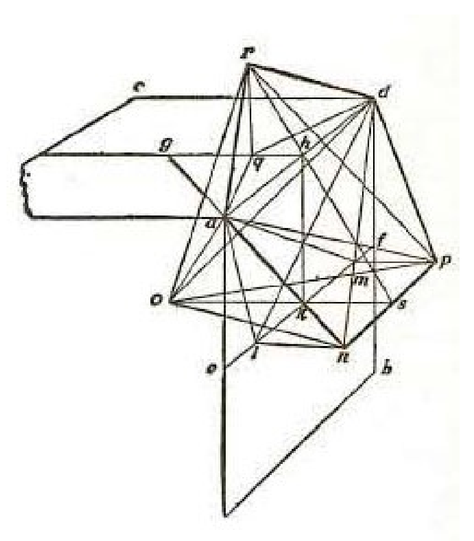
de *ks* con respecto a *qh*. Pues *kh* será a *gr* como *gh* a *qr*, por la séptima del quinto, y *rq* será a *qh* como *ks* a *qh*, por la misma. Pero *gh* es a *qr* como *qr* a *qh*, pues *qr* es igual a *gq*. Entonces, por la trigésima[40] del sexto, la línea *rhs* será una sola. Y, por la segunda del undécimo todo el pentágono en cuestión estará en una misma superficie. Digo además que es equiángulo, según veremos.

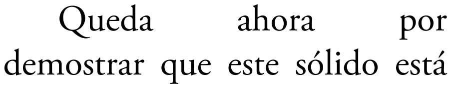
En efecto, como *ek* está dividida según la proporción que tiene el medio y dos extremos y *km* es igual a su parte mayor, toda *em* estará también, por la cuarta[41] del decimotercero, dividida según la proporción que tiene el medio y dos extremos, y su parte mayor, además, será la línea *ek*. Luego, por la quinta[42], las dos líneas *em* y *mk* (y por lo tanto *em* y *mp*, puesto que *mp* es igual a *mk*) son, en la potencia[43], iguales al triple de la línea *ek*, y por lo tanto también de la línea *ae*, puesto que *ae* es igual a *ek*.

Entonces, las tres líneas *ae, em* y *mp* son, en la potencia, iguales al cuádruplo de la línea *ae*. Además, se ve claro, por la penúltima del primero, citada ya dos veces, que la potencia de la línea *ap* es igual a las potencias de las tres líneas *ae, em* y *mp*. De ahí que la potencia de *ap* sea cuádruple con respecto a la potencia de la línea *ae*. Y el lado del cubo, como es doble de la línea *ae*, tiene la potencia cuádruple con respecto a la de aquélla, por la cuarta del segundo. Entonces, según la ciencia común, *ap* será igual al lado del cubo; y como *ad* es uno de los lados del cubo, *ap* será igual a *ad*, y por lo tanto, por la octava del primero el ángulo *ard* es igual al ángulo *anp*.

De la misma manera podrás probar que la línea *dn* al cuadrado es cuádruple con respecto al cuadrado de la mitad del lado del cubo. Luego, como de acuerdo con lo que hemos dicho el pentágono es equilátero y tiene tres ángulos iguales, será equiángulo, por la séptima del decimotercero. Entonces, si de

esta manera o con procedimiento similar construimos sobre cada uno de los lados del cubo un pentágono equilátero y equiángulo, se completará un sólido cerrado por doce superficies pentagonales equiláteras y equiángulas, puesto que el cubo tiene doce lados.




Queda ahora por demostrar que este sólido está circunscrito exactamente por la esfera dada, según se verá. En efecto, tírense desde la línea *sk* dos superficies que dividan al cubo, una pasando por la línea *hk* y la otra por la línea *ef*. Tendremos entonces, por la cuadragésima[44] del undécimo, que la sección común de estas superficies divide al diámetro del cubo y que, a su vez, queda dividida por dicho diámetro en partes iguales. Sea, pues, la línea *ko* su sección común hasta el diámetro del cubo, tal que el punto *o* sea el centro del cubo, y tírense las líneas *oa, on, op, od, or*.

Ahora bien, se ve claro que cada una de las dos líneas *oa y od* es semidiámetro del cubo y por lo tanto son iguales. Y en cuanto a la línea *ok*, también se ve claro, por la cuadragésima del undécimo, que *es* igual a *ek*, es decir a la mitad del lado del cubo; y como *ks* es igual a *km, os* estará dividida por el punto *k*. según la proporción que tiene el medio y dos extremos, y su parte mayor será la línea *ok*, que es igual a *ck*. Entonces, por la quinta[45] del decimotercero la suma de los cuadrados de las dos líneas *os* y *sk* —y por lo tanto también de *os* y *sp*, puesto que *sp* (que no entra en esta demostración) es igual a *ks*—, será tres veces el cuadrado de la línea *ok*, y por lo tanto de la mitad del

lado del cubo. Luego, por la penúltima del primero, el cuadrado de la línea *op* es el triple del cuadrado de la mitad del lado del cubo. Y por el corolario de la decimocuarta[46] del decimotercero se ve claro que el cuadrado del semidiámetro de la esfera es el triple del cuadrado de la mitad del lado del cubo circunscrito por la misma esfera. Entonces *op* es igual al semidiámetro de la esfera que circunda exactamente al cubo propuesto; y por el mismo motivo, lo son todas las líneas tiradas desde el punto *o* a cada uno de los ángulos de todos los pentágonos formados sobre los lados del cubo, es decir, a todos los ángulos que pertenecen exclusivamente a los pentágonos, y no a los que son comunes a dichos pentágonos y a las superficies del cubo, esto es, ángulos propios tales como son, justamente los tres ángulos *n, p, r* en el pentágono que hemos construido.

Ahora bien, con respecto a aquellas líneas que van desde el punto *o* a todos los ángulos que son comunes a los pentágonos y a las superficies del cubo, tales como son en el presente pentágono los dos ángulos *a* y *d*, está claro que son iguales al semidiámetro de la esfera que circunscribe exactamente al cubo, puesto que son diámetros del cubo, por la cuadragésima[47] del undécimo. Pero el semidiámetro del cubo es igual al de la esfera que lo circunda exactamente, según resulta de la decimocuarta[48] del decimotercero. Así, pues, todas las líneas tiradas desde el punto *o* a todos los ángulos del *dodecaedron* (es decir, del sólido contenido por doce superficies pentagonales equiláteras y equiángulas, que así se llama en griego) son iguales entre sí e iguales al diámetro de la esfera. Luego, si al círculo trazado sobre todo el diámetro de la esfera, o bien del cubo, se le hace girar, pasará por todos sus ángulos. Entonces, por definición, ese sólido estará circundado exactamente por la esfera señalada. Digo, además, que el lado de esta figura es una línea irracional, es decir, la que se llama residuo, si el diámetro de la esfera que la circunda exactamente es racional en longitud

o al cuadrado. Como el cuadrado del diámetro de la esfera es triple del cuadrado del lado del cubo, el cuadrado del lado del cubo será racional si el diámetro de la esfera es racional en longitud o al cuadrado; y por la undécima del decimotercero estará claro que la línea *rp* divide la línea *ad*, que es el lado del cubo, según la proporción que tiene el medio y dos extremos, y que su parte mayor es igual al lado del pentágono. Y como su parte mayor es residuo, por la sexta del decimotercero queda manifiesto que el lado de la figura llamada dodecaedro es residuo. Y esto es lo que queríamos demostrar.

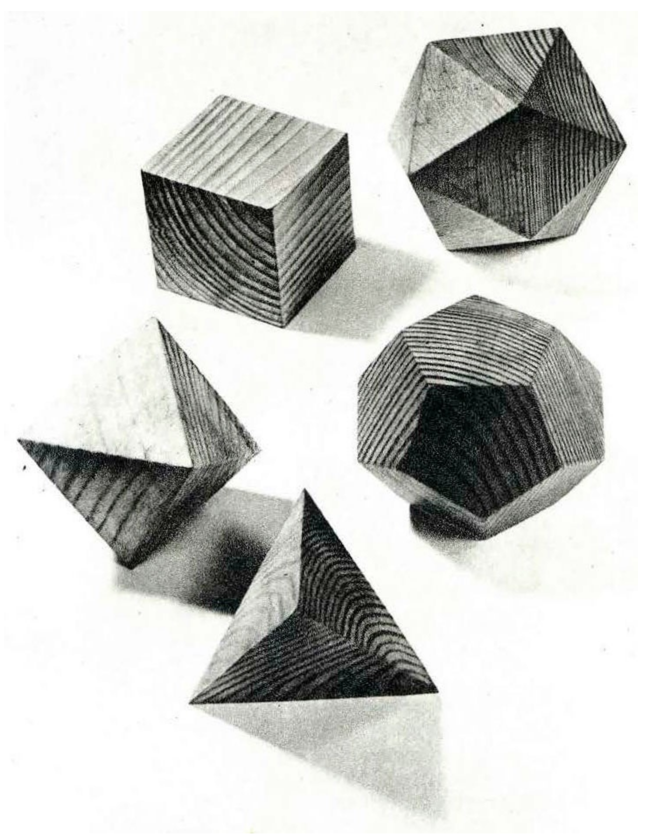
CAPÍTULO XXXI

MODO DE HALLAR LOS LADOS DE TODOS LOS CINCO CUERPOS REGULARES. Veamos cómo hallar los lados de los cinco cuerpos antedichos, circunscritos todos exactamente por una misma esfera, de la cual conozcamos sólo el diámetro.

Verbi gratia: sea *ab* el diámetro propuesto de una determinada esfera por medio del cual tengamos que encontrar los lados de los cinco cuerpos antedichos, que se consideran colocados todos en una misma esfera, de modo tal que, si uno de sus ángulos la toca, también la toquen los demás; es decir, que estén todos circundados por ella. Esto se hará así: dividamos este diámetro en el punto *c*, de modo que *ac* sea doble de *cb*, y en el punto *d* por partes iguales, y sobre este diámetro tracemos el semicírculo *afb*, hacia cuya circunferencia se levantarán dos líneas perpendiculares a la línea *ab*, y sean éstas *ce* y *df*. Unamos *e* con *a* y con *b*, y *f* con *b*. Resulta entonces claro, por la demostración de la decimotercera del decimotercero, que *ae* es lado de la figura de cuatro bases triangulares y equiláteras; y por la demostración de la decimocuarta[49] de dicho libro, que *eb* es lado del cubo; y por la demostración de la decimoquinta[50], que *fb* es el lado de la figura de ocho bases triangulares y equiláteras. Sea, pues, *ag* la línea perpendicular en el punto *a* a la línea *ab*, e igual a ella; únase *g* con *d*, y sea *h* el punto en el cual *gd* divide la circunferencia del semicírculo. Llévese *hk*, perpendicular a *ab*.

Ahora bien, como *ga* es doble de *ad, hk* será, por la cuarta del sexto, el doble de *kd*, puesto que los dos triángulos *gad* y *hkd* son equiángulos, por la trigésima segunda del primero, pues el ángulo *a* del mayor es igual al ángulo *k* del menor, por ser ambos rectos, y el ángulo *d* es común a los dos triángulos. Entonces, por la cuarta del segundo, el cuadrado de *hk* es el cuádruple del cuadrado de *kd*, y por consiguiente, por la penúltima del primero, la potencia de *hd* será el quíntuplo de la potencia de *kd*, y como *db* es igual a *hd* (por ser *d* centro del semicírculo), la potencia de *db* será también el quíntuplo de la potencia de *kd*. Ahora bien, como toda la línea *ab* es el doble de *bd*, de la misma manera que *ac*, extraída de la primera línea, *ab*, es el doble de *cb*, extraída de la segunda *bd*, tendremos también que, por la decimonovena del quinto, *bc*, residuo de la primera línea, será el doble de *cd*, residuo de la segunda, y por lo tanto toda *bd* es el triple de *de*. Entonces el cuadrado de *bd* es el nónuplo, o sea nueve veces el cuadrado de *cd*, y como aquél era solamente el quíntuplo del cuadrado de *kd*, se tendrá que, por la segunda parte de la décima del quinto, el cuadrado de *dc* será menor que el cuadrado de *kd*, y, por lo tanto, *dc* será menor que *kd*. Sea pues *dm* igual a *kd* y tírese hasta la circunferencia *mn*, perpendicular a *ab*, y únase *n* con *b*. Entonces, como *dk* y *dm* son iguales, las dos líneas *hk* y *mn*, conforme a la definición[51] de lo que es "ser líneas equidistantes del centro", estarán a igual distancia del centro, y por lo tanto serán iguales entre sí por la segunda parte de la decimotercera del tercero y por la segunda parte de la tercera de dicho libro. De ahí que *mn* es igual *mk*, puesto que *hk* es igual a ella. Y como *ab* es el doble de *bd*, y *km*, el doble de *dk*, y el cuadrado de *bd*, quíntuplo del cuadrado de *dk*, también, por la decimoquinta del quinto[52], el cuadrado de *ab* será el quíntuplo del cuadrado de *km*, pues el cuadrado del doble es al cuadrado del doble como el cuadrado del simple es al cuadrado del simple. Y por la demostración de la decimosexta

[del decimotercero] está claro que la potencia del diámetro de la esfera es el quíntuplo de la del lado del hexágono en el círculo[53] de la figura de veinte bases. Entonces *km* igual a lado del hexágono en el círculo de la figura de veinte bases, pues la potencia del diámetro de la esfera, que es *ab*, es el quíntuplo de la potencia tanto del lado del hexágono en el círculo de aquella figura como de *km*. Y además, por la demostración de la misma [decimosexta], se ve claro que el diámetro de la esfera está compuesto por el lado del hexágono y por dos lados del decágono en el círculo de la figura de veinte bases. Y así, como *km* es igual al lado del hexágono, y, además, *ak* es igual a *mb*, por ser ellos residuos o remanentes de líneas iguales a las que se han restado líneas iguales, *mb* será igual al lado del decágono. Entonces, como *mn es* igual al lado del hexágono, por ser igual a *km*, *nb* será, por la penúltima del primero y por la décima del decimotercero, igual al lado del pentágono en el círculo de la figura de veinte bases.



Los cinco cuerpos regulares.

Y como, por la demostración de la decimosexta de dicho libro, resulta que el lado del pentágono en el círculo de la figura de veinte bases es lado de esa misma figura de veinte bases, se ve claramente que la línea *nb* es el lado de esta figura. Divídase luego *eb* (que es el lado del cubo circunscrito exactamente por la esfera propuesta) según la proporción que tiene el medio y dos extremos, en el punto *p*, y sea *pb* su parte mayor; estará claro entonces, por la demostración precedente, que *pb* es el lado de la figura de doce bases. Hemos hallado así los lados de los cinco cuerpos antedichos, mediante el solo diámetro de la esfera; y tales lados son estos: *ae*, lado de la pirámide de cuatro bases; *eb*, lado del cubo; *fb*, lado del cuerpo de ocho bases; *nb*, lado del cuerpo de veinte bases y la línea *pb*, lado del cuerpo de doce

bases. Ahora veremos cuáles de estos lados son mayores que los otros. En efecto, se ve claramente que *ae* es mayor que *fb*, pues el arco *ae* es mayor que el arco *fb*, y también *fb* es mayor que *eb*, y *eb* es mayor que *nb*. Digo también que *nb* es mayor que *pb*, pues, como *ac* es doble de *cb*, el cuadrado de *ac* será, por la cuarta del segundo, el cuádruplo del cuadrado de *cb*; y, por la segunda parte del corolario de la octava del sexto y por el corolario de la decimoséptima[54] del libro citado, está claro que el cuadrado de *ab* es el triple del cuadrado de *be*. Pero, por la vigesimoprimera[55] del sexto, el cuadrado de *ab* es el cuadrado de *be* como el cuadrado de *be* es al cuadrado de *cb*, pues la proporción de *ab* con respecto a *be* es igual a la de *be* con respecto a *be*, por la segunda parte del corolario de la octava del sexto. Entonces, por la undécima del quinto, el cuadrado de *be* es el triple del cuadrado de *cb*, y como el cuadrado de *ac* es el cuádruplo del mismo cuadrado, según se ha demostrado, el cuadrado de *ac*, por la primera parte de la décima del quinto, será mayor que el cuadrado de *be*. Por lo tanto, la línea *ac* es mayor que la línea *be*, y, por consiguiente *am* será aún mayor, y ya por la novena del decimotercero se ve claro que, si se divide la línea *am* según la proporción que tiene el medio y dos extremos, su parte mayor será la línea *km*, que es igual a *mn*, y también si *be* se divide según la misma proporción, es decir, según la proporción que tiene el medio y dos extremos, su parte mayor será la línea *pb*. Y como toda *am* es mayor que toda *be*, entonces *mn*, que es igual a la parte mayor de *am*, será mayor que *pb*, que es la parte mayor de *eb*. Y esto se ve claro por la segunda del libro decimocuarto que lo demuestra plenamente sin que haya necesidad de recurrir a las que le siguen. Entonces, por la decimonovena del primer libro, con más razón será *nb* mayor que *pb*.

De ahí resulta que los lados de los cinco cuerpos antedichos están dispuestos de menor a mayor en el mismo orden con que

se suceden unos a otros. Esto ofrece sólo una salvedad, y es que tal orden no se observa en el caso del cubo y del octaedro o cuerpo de ocho bases. En efecto, el lado del octaedro precede al lado del cubo, mientras que el cubo en su construcción y formación precede al octaedro, según se ve en el decimotercero, y no sin misterio[56]. De ahí que, en su formación, el cubo esté antes que el octaedro, pues en la misma división del diámetro de la esfera propuesta se halla el lado de la pirámide de cuatro bases triangulares y el lado del cubo. Entonces, *ae*, lado de la pirámide, será mayor que el lado de cualquier otro cuerpo. Después de ella, *fb*, lado de la figura de ocho bases, será mayor que los lados de cualquier otro cuerpo que le siga. En tercer lugar, sigue en tamaño *eb*, lado del cubo; en el cuarto estará *nb*, lado del cuerpo de veinte bases o icosaedro. El menor de todos será *pb*, lado del dodecaedro, es decir, del cuerpo de doce bases pentagonales.

CAPÍTULO XXXII

DE LA PROPORCIÓN DE DICHOS CUERPOS REGULARES ENTRE Sí Y CON SUS CUERPOS DEPENDIENTES. Ahora que hemos entendido que son suficientes estos cinco cuerpos regulares, habiéndose mostrado la imposibilidad de que sean más de cinco y la característica de sus dependientes de multiplicarse al infinito, debemos establecer a continuación sus recíprocas proporciones en cuanto a su capacidad y cabida y en cuanto a su superficie, y luego, antes de su área corporal, examinar la inclusión de unos en otros. Las proporciones de uno a otro serán siempre irracionales debido a nuestra proporción antes considerada, la cual interviene en su composición y formación, según se ha dicho, con excepción del tetraedro, del cubo y del octaedro; por ser exactas las proporciones de éstos con respecto al diámetro de la esfera en la cual se inscriben podrán ser tal vez racionales, pero a la del icosaedro y la del dodecaedro comparadas con cualesquiera otras no pueden ser nunca racionales, por dicha razón.

Así, pues, oh excelso Duque, me parece que no hace falta aquí hablar más de esto, porque sería aumentar el cúmulo de infinitas irracionalidades en que el intelecto más bien acabaría por confundirse que por encontrar en ellas placer, que es el fin a que nuestro estudio siempre tiende. Y al respecto me parece que debe ser suficiente lo que se ha dicho en nuestro particular tratado sobre esos cuerpos, incluido en nuestra obra; fácil es, por

el gran número de ejemplares distribuidos entre todos, recurrir a él. Y de las dimensiones de tales cuerpos que figuran en aquel lugar, de acuerdo con la peculiar índole de cada cual, podrá resultar, además de utilidad, gran deleite. Lo mismo digo de todos los cuerpos dependientes, algunos de los cuales figuran en aquel lugar. Por la décima de la decimocuarta se concluye que la proporción del dodecaedro con respecto al icosaedro, cuando ambos están construidos en la misma esfera, es justamente igual a la proporción de todo el conjunto de sus superficies con respecto al de las superficies del icosaedro. Y la decimosexta de dicho libro dice que el octaedro es divisible en dos pirámides de igual altura, equivalente al semidiámetro de la esfera donde está construido el octaedro, y sus bases son cuadradas. Y el cuadrado superficial [, es decir, de la base,] es la mitad del cuadrado del diámetro de la esfera. Este conocimiento es de gran utilidad para su medida, y por él se pueden llegar a conocer muchas otras cosas.

CAPÍTULO XXXIII

DE LA PROPORCIÓN MUTUA DE TODAS SUS SUPERFICIES. Sus superficies, excelso Duque, podemos decir que son proporcionales entre sí de la misma manera que se ha dicho para su masa corpórea, es decir, irracionales por culpa de la figura pentagonal que interviene en el dodecaedro. Pero las superficies de las otras pueden ser a veces racionales, como las del tetraedro, del cubo y del octaedro, por ser triangulares o cuadradas y conocidas en proporción con el diámetro de la esfera correspondiente en que están formadas, como hemos visto antes. La octava del decimocuarto concluye que todas las superficies del cuerpo de doce bases pentagonales son a todas las superficies del cuerpo de veinte bases triangulares, es decir que las del dodecaedro son a las del icosaedro como la del lado del cubo con respecto al lado del triángulo del cuerpo de veinte bases, cuando todos dichos cuerpos están contenidos exactamente, o sea circunscritos, por una misma esfera. Por lo tanto, no me parece conveniente pasar por alto la admirable concordancia de sus bases; es decir que las bases del dodecaedro y las del icosaedro están circunscritas exactamente por un mismo círculo, según muestra la quinta de dicho decimocuarto. Esto es digno de nota; tiene lugar cuando dichas figuras están construidas en la misma esfera. Entre las superficies del tetraedro y las del octaedro, tomadas en conjunto, se da la proporción conocida por la decimocuarta de dicho libro

decimocuarto, pues la base del tetraedro es una vez y un tercio la base del octaedro, es decir, está en proporción sesquitercia, la cual se da cuando el mayor contiene al menor una vez y un tercio, como por ejemplo la de 8 a 6 y la de 12 a 9. La proporción de todas las superficies del octaedro, tomadas en conjunto, respecto de las del tetraedro es sesquiáltera, es decir, una vez y media, como si las superficies del octaedro equivaliesen a 6 y las del tetraedro a 4. Dicha proporción se da cuando el mayor contiene al menor una vez y media, y se da cuando [dichos cuerpos] son de una misma esfera. Todas las superficies del tetraedro unidas con las del octaedro componen una superficie, llamada medial, según la decimotercera de dicho libro decimocuarto. Y todas las superficies del hexaedro, o cubo, son iguales al doble del cuadrado del diámetro de la esfera que lo circunscribe, y la perpendicular que va desde el centro de la esfera a cada una de las bases de dicho cubo es siempre igual a la mitad del lado de dicho cubo, por la última del decimocuarto. Es decir que si el diámetro fuese 4, todas esas superficies serían 32; y si la perpendicular fuera 1, el lado del cubo sería 2. Como hemos tratado ampliamente, en nuestra obra, de tales proporciones y superficies, servirán de suplemento a este libro junto con las de los cuerpos dependientes, posibles, mediante diligentes operaciones algebraicas.

CAPÍTULO XXXIV

DE LAS INCLUSIONES DE LOS CINCO CUERPOS REGULARES, UNOS EN OTROS. CUÁNTOS SON EN TOTAL Y EL POPQUÉ. A continuación debemos poner en claro cómo de estos cinco cuerpos esenciales, es decir regulares, el uno está contenido por el otro, cuáles lo están y cuáles no, y por qué. En primer término, hablando del tetraedro, se ve que éste no puede de ninguna manera acoger en sí otra figura como no sea el octaedro, es decir, el cuerpo de ocho bases triangulares y de seis ángulos sólidos; pues en aquella figura no hay ni lados, ni bases, ni ángulos, en que los lados del cubo, sus ángulos, o sus superficies puedan apoyarse de modo que las toquen uniformemente conforme a lo que se requiere para su verdadera inscripción, tal como su forma material se ofrece a nuestra vista, y como se advierte claramente, según ciencia verdadera, en la primera del decimoquinto. Lo mismo con respecto a los otros dos, a saber, el icosaedro y el dodecaedro. Así, pues, cuando queramos inscribir el octaedro en dicho cuerpo de cuatro bases o tetraedro, será de esta manera. Empezaremos por construir dicho tetraedro tal como hemos enseñado más arriba. Hecho esto, dividiremos cada uno de sus lados en partes iguales, y sus puntos medios los uniremos todos entre sí con líneas rectas. Con esto, sin duda, habremos colocado exactamente dicho cuerpo en aquél de manera que sus seis ángulos sólidos se apoyen uniformemente sobre los seis

lados de dicho tetraedro. Esto se comprueba por experiencia material, y se ve claro por la segunda del decimoquinto.

CAPÍTULO XXXV

CÓMO SE FORMA Y SE COLOCA EN EL CUBO DICHO TETRAEDRO. Dicho tetraedro se colocará en el cubo de esta manera: haremos antes el cubo según las indicaciones dadas arriba; luego, en cada una de sus seis superficies cuadradas tiraremos la diagonal, o sea el diámetro, y así habremos conseguido nuestro propósito, según demuestra la primera del decimoquinto, pues dicho tetraedro, según dijimos, tiene seis lados que corresponden al número de las seis superficies del cubo y que vendrían a ser las seis diagonales trazadas en dichas superficies. Los cuatro ángulos de la pirámide se afirman en cuatro de los ocho ángulos de dicho cubo. Esto está claramente confirmado, mediante las [formas] materiales, por la maestra de todas las cosas, es decir, por la santa experiencia.

CAPÍTULO XXXVI

INCLUSIÓN DEL OCTAEDRO EN EL CUBO. ☙ Si queremos formar en el hexaedro el cuerpo de ocho bases, es decir, el octaedro, antes tenemos que construir en el cubo la pirámide triangular equilátera, cuyos lados, según dijimos, son los seis diámetros de las bases del cubo. Por tanto, si dividimos cada uno de dichos diámetros en partes iguales, uniendo sus puntos medios entre sí con líneas rectas, sin duda habremos formado exactamente en el cubo propuesto el octaedro, y todos sus ángulos sólidos se afirmarán exactamente en las bases de dicho cubo, por la tercera del decimoquinto.

CAPÍTULO XXXVII

DE LA CONSTRUCCIÓN DEL HEXAEDRO EN EL OCTAEDRO. ℌℯ El hexaedro o cubo se construirá en el octaedro de esta manera: antes haremos dicho octaedro de acuerdo con las enseñanzas proporcionadas arriba en este libro. Hecho esto, hállese el centro de cada una de sus caras triangulares conforme a la quinta del cuarto. Estos ocho centros los uniremos luego uno con otro, mediante doce líneas rectas. Así habremos cumplido nuestro propósito, y cada uno de los ángulos sólidos del cubo vendrá a afirmarse sobre la base de dicho octaedro, como afirma la cuarta del decimoquinto.

CAPÍTULO XXXVIII

DE LA INSCRIPCIÓN DEL TETRAEDRO EN EL OCTAEDRO. [……][57] construirás en el octaedro el cubo, como indicamos arriba, y en el cubo, de la manera que dijimos, construirás el cuerpo de cuatro bases.

CAPÍTULO XXXIX

DE LA FORMACIÓN DEL DODECAEDRO EN EL ICOSAEDRO. El icosaedro, como se ha dicho, tiene sus doce ángulos sólidos contenidos cada uno por cinco ángulos superficiales pertenecientes a sus cinco triángulos. Por tanto, si se quiere hacer en él el dodecaedro, conviene construir antes dicho icosaedro según hemos enseñado en este tratado, y cuando esté así debidamente dispuesto, hállese el centro de cada una de sus bases triangulares, de acuerdo con la quinta del cuarto; tales centros los uniremos luego entre sí con treinta líneas rectas, de manera que se formarán necesariamente doce pentágonos, cada uno opuesto a un ángulo sólido de dicho icosaedro. Y cada uno de los lados de dicho pentágono se opondrá, en cruz, a cada uno de los lados de dicho icosaedro; y así como en éste hay doce ángulos sólidos, de la misma manera en el dodecaedro hay doce pentágonos, y como en el icosaedro hay veinte bases triangulares, así en dicho dodecaedro hay veinte ángulos sólidos formados en dichas bases mediante dichas líneas. Y así como en el icosaedro hay treinta lados, de la misma manera en el dodecaedro hay treinta lados opuestos, en cruz, a aquéllos, según se ha dicho y como su forma lo manifiesta, y según lo concluye la sexta del decimoquinto.

CAPÍTULO XL

DE LA COLOCACIÓN DEL ICOSAEDRO EN EL DODECAEDRO. ❦ Cuando queramos formar el icosaedro en el dodecaedro, antes construiremos éste según las indicaciones dadas arriba en este tratado, y hallaremos el centro de los doce pentágonos que lo contienen, según enseña la decimocuarta del cuarto, y estos centros los uniremos entre sí con treinta líneas, de manera que en dicho cuerpo se formarán veinte triángulos y doce ángulos sólidos, contenidos, cada uno, por cinco ángulos superficiales de dichos triángulos. Sus puntas estarán en los doce centros de los doce pentágonos; asimismo estas treinta líneas se opondrán, en cruz, a las treinta del dodecaedro, tal como se ha dicho para el caso inverso y según se ve por la séptima de dicho decimoquinto.

CAPÍTULO XLI

DE LA COLOCACIÓN DEL CUBO EN EL DODECAEDRO. Nos será fácil, también, construir el cubo en el dodecaedro[58] ya que éste se forma sobre los doce lados del cubo, según figura en la decimoséptima del decimotercero. En efecto, si a cada uno de sus doce pentágonos, según la exigencia de dicha proposición, se tiran doce cuerdas, sin duda se formarán seis superficies cuadrangulares equiláteras y a cada una de ellas se opondrán dos ángulos sólidos de dicho dodecaedro y en ocho de sus ángulos estarán formados los ocho del cubo inscrito, de manera que sobre cada una de las bases del cubo quedará casi la forma del cuerpo *scratile*[59]. Todo esto resulta claramente de la octava del decimoquinto.

CAPÍTULO XLII

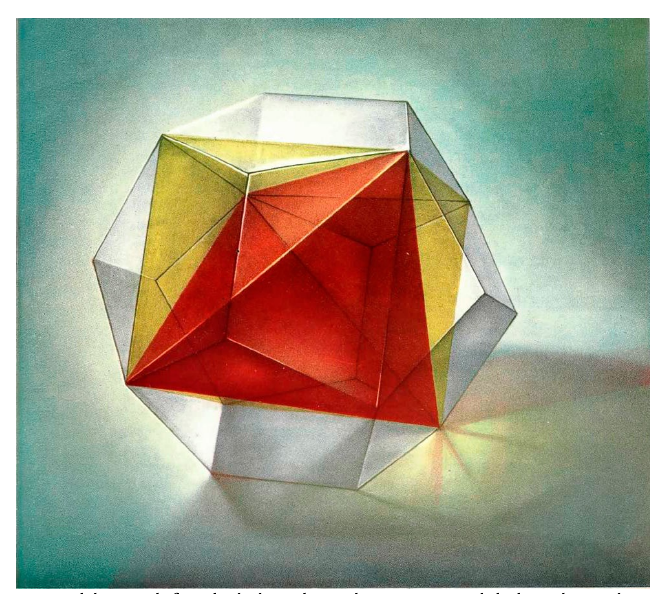
CÓMO SE FORMA EL OCTAEDRO EN EL DODECAEDRO. Si en el dodecaedro disponemos antes el cubo tal como se ha dicho en el anterior capítulo, será fácil formar en dicho dodecaedro el octaedro. En efecto, dividiremos en partes iguales los seis lados del dodecaedro opuesto a las seis superficies del cubo, es decir, aquellos lados con que culminan cada serátil de los seis que hay. Ahora bien, esos seis puntos medios los uniremos entre sí con doce líneas rectas, de manera que vendrán a formarse seis ángulos sólidos, contenido cada uno por cuatro ángulos superficiales de los cuatro triángulos del octaedro, y cada uno de ellos toca uno de esos seis lados del dodecaedro. Por consiguiente, habremos logrado nuestro propósito como se ve en la novena del decimoquinto.

CAPÍTULO XLIII

DE LA INCLUSIÓN DEL TETRAEDRO EN DICHO DODECAEDRO. ✠ También podrá colocarse el tetraedro en el mismo dodecaedro, si antes se forma en él el cubo, tal como se ha indicado, y luego en dicho cubo se coloca el tetraedro, según también se ha mostrado; hecho esto, se verá claramente que habremos conseguido nuestro propósito[60] de la siguiente manera. Como los ángulos sólidos del cubo se apoyan en los ángulos sólidos del dodecaedro y los ángulos sólidos del tetraedro se afirman en los del cubo, se sigue que dicho tetraedro está debidamente incluido en el dodecaedro propuesto, lo cual se manifiesta en la experiencia de las formas materiales compuestas por nosotros y ofrecidas a las manos de Vuestra Alteza, y en la demostración científica de la décima de dicho libro decimoquinto.

CAPÍTULO XLIV

CONSTRUCCIÓN DEL CUBO EN EL ICOSAEDRO. Podrá formarse el cubo en el icosaedro si en éste se construye antes el dodecaedro, tal como dijimos antes, y luego, en ese dodecaedro, se construye el cubo de la manera indicada. Hecho esto, se verá hemos logrado nuestro propósito, conforme a lo que antes hemos dicho, pues los ángulos sólidos del dodecaedro caen todos en el centro de las bases del icosaedro, y los ángulos sólidos del cubo caen en dichos ángulos sólidos del dodecaedro. Por consiguiente habremos logrado nuestro propósito, tal como también lo afirma la undécima del decimoquinto.



Modelo en celofán, de dodecaedro, cubo inscrito en el dodecaedro, y el tetraedro inscrito en el cubo y en el dodecaedro. Estos son los únicos cuerpos que, estando inscritos unos en otros, pueden inscribirse al mismo tiempo en la esfera.

CAPÍTULO XLV

DE CÓMO FORMAR EL TETRAEDRO EN EL ICOSAEDRO. No hay duda de que si en dicho icosaedro se forma el cubo, según hemos enseñado arriba, y luego en este cubo se construye el tetraedro, necesariamente aquél vendrá también a estar inscrito en dicho icosaedro. En efecto, como los ángulos sólidos de la pirámide de cuatro bases triangulares tocan los ángulos sólidos del cubo, y los del cubo tocan los del icosaedro, se sigue *de primo ad ultimum* que también los del tetraedro tocan los del icosaedro. Por consiguiente se ha logrado nuestro propósito por la decimosegunda del decimoquinto. Y esto en lo que respecta a sus inclusiones, según nos hemos propuesto.

CAPÍTULO XLVI

POR QUÉ DICHAS INSCRIPCIONES NO PUEDEN SER MÁS. ℳ Por lo que hemos dicho, pues, se ve, excelso Duque, que, siendo cinco los cuerpos regulares, si se supusiera que en cada uno de ellos pudieran formarse debidamente los demás, se seguiría que cada cuerpo acogería en sí cuatro, y, por consiguiente, entre todos, darían veinte inscripciones, es decir, cuatro veces cinco. Pero como cada uno no acoge a todos, según hemos indicado, no hay sino doce inscripciones. A saber: una, la del octaedro en el tetraedro; dos en el cubo, la del tetraedro y la del octaedro, y dos más en el octaedro, una del cubo y una del tetraedro; las del icosaedro son tres: una del dodecaedro, otra del cubo y la restante del tetraedro; y las del dodecaedro son cuatro: una del icosaedro, otra del cubo, otra más del octaedro y la cuarta del tetraedro. Todas ellas en conjunto son doce. En efecto, en la pirámide de cuatro caras no hay ni ángulos ni superficies en que puedan apoyarse los ángulos de los otros cuerpos regulares, como no sean los del octaedro. También el cubo puede acoger en sí únicamente a la pirámide y al octaedro. El octaedro puede acoger solamente al cubo y a la pirámide, y en ninguno de éstos es posible colocar alguno de los otros dos, es decir, el icosaedro y el dodecaedro. Y mientras que el icosaedro da cabida a los tres cuerpos, la niega únicamente al octaedro, y esto sucede por respeto al glorioso signo que hace temblar a todos los demonios, es decir, el de la Santa Cruz. En

efecto, las tres líneas tiradas diametralmente de un ángulo a otro, que se cortan entre sí a escuadra, no hay modo de poder trazarlas debidamente para la disposición de dicho octaedro. En cambio el dodecaedro, por estar dotado, entre los otros, de singular prerrogativa, a ninguno ha prohibido o vedado alojamiento, y es receptáculo de todos. Por esto el antiguo PLATÓN lo atribuyó, junto con los otros cuerpos que hemos indicado, al universo.

CAPÍTULO XLVII

CÓMO SE FORMA LA ESFERA EN CADA UNO DE ESTOS CUERPOS REGULARES. ❦ Según se ha visto, excelso Duque, hemos demostrado arriba que cada uno de dichos cinco cuerpos regulares se puede inscribir en la esfera propuesta y puede ser circunscrito por ella. Queda ahora por mostrar debidamente cómo también dicha esfera puede a su vez inscribirse en cada uno de ellos. A continuación mostraremos con evidente claridad que a su vez la esfera puede inscribirse en todos. Esto se demuestra así: desde el centro de la esfera que circunscribe a cada uno de estos cuerpos, salgan o tírense las perpendiculares a todas las bases de todos ellos. Tales perpendiculares caerán necesariamente en los centros de los círculos que circunscriben exactamente a dichas bases, y como todos los círculos que circunscriben exactamente a dichas bases son iguales, serán iguales dichas perpendiculares. Entonces, si, conforme a la cantidad de una de ellas, describimos el círculo alrededor del centro de la esfera que lo circunscribe y hacemos girar su semicírculo hasta que vuelva al lugar de donde empezó a moverse, como es necesario que tal semicírculo pase por todas las extremidades de las perpendiculares, resultará por el corolario de la decimoquinta[61] del tercero que la esfera descrita por el movimiento de este semicírculo toca exactamente todas las bases del cuerpo dado donde concurren las perpendiculares. En efecto, la esfera no puede tocar las bases del cuerpo más de lo

que toca el semicírculo cuando se mueve. Por tanto se ve claramente que hemos inscrito la esfera en el cuerpo indicado, tal como era nuestro propósito.

CAPÍTULO XLVIII

DE LA FORMA Y DISPOSICIÓN DEL TETRAEDRO PLANO SÓLIDO O HUECO, ABSCISO PLANO SÓLIDO O HUECO, ELEVADO SÓLIDO O HUECO. ℜ I-II[62] El tetraedro plano sólido o hueco, está formado por seis líneas iguales que contienen doce ángulos superficiales y cuatro sólidos, y que forman entre sí cuatro bases triangulares, equiláteras y equiángulas.

III-IV. — El tetraedro despuntado, o absciso, plano sólido o hueco, está contenido por dieciocho líneas que originan treinta y seis ángulos superficiales y doce sólidos; lo circundan ocho bases, de las cuales cuatro son hexagonales, es decir, de seis lados, y cuatro equiláteras, es decir, de tres lados [……][63] según la forma material nos muestra a la vista. Y se origina del precedente mediante el corte uniforme de sus lados en tres partes iguales.

V-VI. — El tetraedro elevado, es decir, con puntas, sólido o hueco, tiene también dieciocho líneas, seis de las cuales son comunes, y tiene treinta y seis ángulos superficiales, cuatro de los cuales son conos, [o cúspide] de las pirámides superficiales, y cuatro son comunes a las cinco pirámides, es decir, a la pirámide interior, que el ojo no puede ver, sino que sólo se capta con el intelecto, y a las otras cuatro exteriores. Estas cinco pirámides forman dicho cuerpo cuando son entre sí equiláteras y equiángulas, según su forma material lo demuestra. Las

superficies que lo revisten, impropiamente llamadas bases, son en total doce y todas triangulares. De tal cuerpo no puede de ninguna manera darse el correspondiente elevado absciso, por el inconveniente de los hexágonos que no forman ángulos sólidos.

CAPÍTULO XLIX

DEL HEXAEDRO PLANO SÓLIDO O HUECO, ABSCISO SÓLIDO O HUECO, ELEVADO PLANO Y ELEVADO ABSCISO. VII-VIII — El hexaedro, es decir, cubo, plano sólido o hueco tiene doce líneas o lados o costados, veinticuatro ángulos superficiales y ocho sólidos, y seis bases o superficies que lo contienen, todas cuadradas, equiláteras y equiángulas, semejantes a la forma del diabólico instrumento que se llama dado o taxillo.

IX-X. — El hexaedro despuntado o absciso plano, sólido o vacío, tiene veinticuatro líneas, que originan en él cuarenta y ocho ángulos superficiales, veinticuatro de los cuales son rectos y los demás agudos. Tiene doce ángulos sólidos, y está contenido por catorce superficies o bases, es decir, por seis cuadradas y ocho triangulares. Todas estas líneas son comunes a las bases cuadradas y a las triangulares porque las seis cuadradas, unidas entre sí, formando ángulos, necesariamente originan ocho triángulos, tal como sucedió con los hexágonos en el tetraedro absciso. Este cuerpo nace del cubo, mediante el corte uniforme en la mitad de sus lados, como se comprueba examinando su forma material.

XI-XII — El hexaedro elevado, sólido o hueco, está constituido necesariamente por treinta y seis líneas, las que, al juntarse, forman setenta y dos ángulos superficiales y seis sólidos piramidales, cada uno contenido por cuatro ángulos

superficiales. Tal cuerpo está revestido por veinticuatro superficies triangulares, las que propiamente no deben llamarse bases. De las líneas mencionadas, doce son comunes a aquellos triángulos superficiales que lo contienen y lo circundan. Dicho cuerpo está compuesto por seis pirámides laterales cuadriláteras exteriores, que se ofrecen a nuestra vista, conforme a la posición del cuerpo. En cuanto al cubo interior sobre el cual dichas pirámides se apoyan y que sólo el intelecto imagina, pues se esconde de nuestra vista por la superposición de dichas pirámides, sus seis superficies cuadradas son bases de dichas seis pirámides (que son de igual altura) y se esconden a la vista circundando ocultamente a dicho cubo.

XII-XIV — El hexaedro absciso elevado, sólido o hueco, tiene setenta y dos líneas o lados o costados. Éstos forman ciento cuarenta y cuatro ángulos superficiales y catorce sólidos, todos piramidales. De éstos, seis son de pirámides lateradas[64] cuadrangulares y ocho de pirámides triangulares. En cuanto a las líneas mencionadas, veinticuatro son comunes a las pirámides triangulares y cuadrangulares. Dicho cuerpo tiene cuarenta y ocho caras, o sea superficies que lo circundan, todas triangulares; se compone del hexaedro cortado, sólido interior, que puede percibirse sólo por el intelecto, y de catorce pirámides, según hemos dicho. Arrojado sobre un plano, se queda apoyado sobre tres conos o puntas piramidales, como su forma lo demuestra.

CAPÍTULO L

DEL OCTAEDRO PLANO SÓLIDO O HUECO, Y ABSCISO SÓLIDO O HUECO, Y ELEVADO SÓLIDO O HUECO. XV-XVI. — El octaedro plano, sólido o hueco, tiene doce líneas y veinticuatro ángulos superficiales, y ocho sólidos; está contenido por ocho bases triangulares equiláteras y equiángulas, tal como se nos presenta en su forma material.

XVII-XVIII. — El octaedro absciso o cortado plano, sólido o hueco, tiene treinta y seis líneas, que forman setenta y dos ángulos superficiales, cuarenta y ocho de los cuales pertenecen a los hexágonos y veinticuatro a los cuadrados. Contiene veinticuatro ángulos sólidos, y tiene catorce bases, ocho de las cuales son hexagonales, es decir, de seis lados, y seis tetragonales, es decir, cuadradas. Pero de dichas líneas, veinticuatro son comunes a los cuadrados y a los hexágonos.

Esos cuadrados están formados por los hexágonos que, en número de ocho, se tocan de modo uniforme como nos lo hace ver claramente nuestro intelecto en la forma material de tal cuerpo. Tampoco [en este caso] es posible formar su correspondiente cuerpo elevado de aspecto uniforme, a causa del inconveniente de los hexágonos, los cuales, como se ha dicho del tetraedro absciso, no pueden dar lugar a ningún ángulo sólido; se forma del precedente por corte uniforme de sus lados en tres partes.

XIX-XX. — El octaedro elevado, sólido o hueco tiene treinta y

seis líneas de igual longitud, y setenta y dos ángulos superficiales y ocho sólidos piramidales. Está contenido por veinticuatro superficies, todas triangulares equiláteras y equiángulas, que lo circundan exactamente. Pero de esas líneas doce son comunes a todos los triángulos de las pirámides.

Este cuerpo está compuesto de ocho pirámides lateradas triangulares, equiláteras y equiángulas, de igual altura, que se muestran exteriormente, y, además, del octaedro interior, que es perceptible únicamente por el intelecto, mediante la imaginación, y cuyas bases son bases de esas ocho pirámides, según nos lo muestra su forma material.

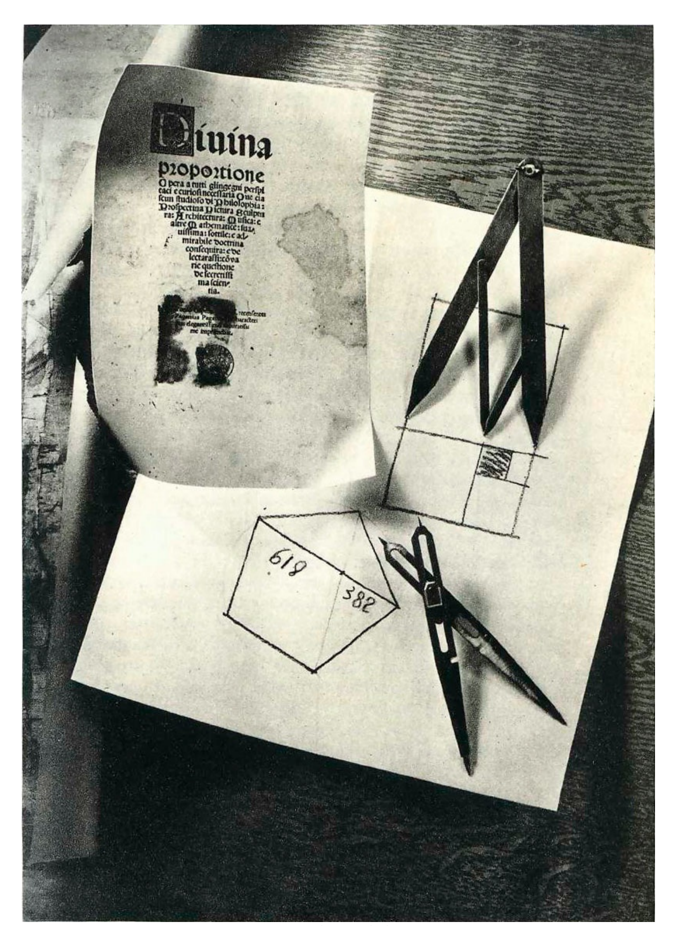
CAPÍTULO LI

DEL ICOSAEDRO PLANO SÓLIDO O HUECO, ABSCISO SÓLIDO O HUECO Y ELEVADO SÓLIDO O HUECO. XXI-XXII. — El icosaedro plano, sólido o hueco, contiene treinta líneas o lados, todos iguales entre sí, que originan en él sesenta ángulos superficiales y doce sólidos; forman también en él veinte bases, todas triangulares equiláteras y equiángulas, y cada uno de esos ángulos sólidos está formado o contenido por cinco ángulos superficiales de dichas caras triangulares, tal como lo demuestra su forma material.

XXIII-XXIV. — El icosaedro absciso plano, sólido o hueco, tiene noventa lados o líneas y ciento ochenta ángulos superficiales. De éstos, ciento veinte son de los hexágonos que lo componen, y sesenta son de los pentágonos, que también entran en su composición, los cuales son todos equiláteros. Esas líneas forman alrededor de dicho cuerpo treinta y dos bases de las cuales veinte son hexagonales, es decir, de seis lados iguales, y doce son pentagonales, es decir, de cinco lados iguales. Ahora bien: todas son, en su especie, equiláteras y equiángulas entre sí; es decir, todos los hexágonos son entre sí de ángulos iguales, y así también los pentágonos son de ángulos iguales. Pero todos los lados, tanto los de los pentágonos cuanto los de los hexágonos, son todos iguales entre sí. Únicamente en los ángulos difieren los pentágonos y los hexágonos. Este cuerpo se origina del precedente cuerpo regular cuando se cortan todos sus

lados a la altura de un tercio. Mediante tales cortes se originan veinte hexágonos y doce pentágonos, como se ha dicho, y treinta ángulos corpóreos o sólidos. Pero de dichas líneas, sesenta son comunes a los hexágonos y a los pentágonos, pues los veinte hexágonos unidos uniformemente entre sí originan por fuerza doce pentágonos. Tampoco de este cuerpo puede darse el correspondiente elevado, por el inconveniente de dicho hexágono, tal como dijimos arriba para el tetraedro y octaedro abscisos.

XXV. — El icosaedro elevado, sólido o hueco contiene noventa líneas, ciento ochenta ángulos superficiales y veinte sólidos piramidales y tiene sesenta bases o superficies todas triangulares equiláteras y equiángulas, que lo circundan. Pero de las noventa líneas, treinta son comunes a cada una de las superficies de sus veinte pirámides. Este cuerpo está compuesto por veinte pirámides lateradas, equiláteras y equiángulas, de igual altura, y por el icosaedro íntegro interior, perceptible únicamente por el intelecto, mediante la imaginación, y cuyas bases son también bases de esas veinte pirámides. Todo esto lo demuestra también su forma material.



Compases de medida áurea.

CAPÍTULO LII

DEL DODECAEDRO PLANO SÓLIDO O HUECO, ABSCISO SÓLIDO O HUECO, ELEVADO SÓLIDO O HUECO, Y DEL ABSCISO ELEVADO, SÓLIDO O HUECO. SU ORIGEN O DEPENDENCIA. XXVII-XXVIII. — El dodecaedro plano sólido o hueco, tiene treinta líneas iguales, que contienen en él sesenta ángulos planos; tiene además veinte ángulos sólidos y doce bases o superficies que lo contienen y son todos pentágonos de lados y ángulos iguales entre sí, según puede verse.

XXIX-XXX — El dodecaedro despuntado o absciso plano, sólido o hueco, tiene sesenta líneas, todas de igual longitud, y ciento veinte ángulos superficiales y treinta sólidos, pero, de los ciento veinte superficiales, sesenta son de triángulos y sesenta de pentágonos. Tales triángulos se originan necesariamente de dichos pentágonos si se unen éstos en los ángulos, como se ha dicho para el origen de los triángulos del tetraedro y del octaedro abscisos, que están formados por hexágonos, triángulos o cuadrángulos [respectivamente], y también en los del icosaedro absciso, [formados] por hexágonos y pentágonos, como demuestra la figura material. Cada uno de esos ángulos sólidos está formado y contenido por cuatro ángulos superficiales, dos de los cuales son de triángulos y dos de pentágonos, concurrentes hacia un mismo punto. Todas sus líneas o lados son comunes a los triángulos y a los pentágonos,

pues si se unen debidamente entre sí, los unos son causa de los otros, es decir, los triángulos de los pentágonos y los pentágonos de los triángulos. Y así como los doce pentágonos equiláteros, unidos angularmente, forman en este cuerpo veinte triángulos, así también podemos decir que veinte triángulos equiláteros, unidos angularmente entre sí, originan doce pentágonos también equiláteros. Por eso se ve que tales líneas son todas comunes a ellos, como hemos dicho. Las superficies que circundan dicho cuerpo son treinta y dos, doce de las cuales son pentágonos equiláteros y equiángulos, y veinte son triangulares, también equiláteras. Y todas [estas superficies], según hemos dicho, se originan unas de otras, recíprocamente. Esto se ve por su forma material. Dicho cuerpo deriva del anterior, si aquél se corta uniformemente en la mitad de cada uno de sus lados.

XXXI-XXXII. — El dodecaedro elevado sólido o hueco, tiene noventa líneas y ciento ochenta ángulos superficiales, doce sólidos elevados piramidales pentagonales y además veinte ángulos sólidos bajos y hexagonales. Tiene además sesenta superficies, y todas triangulares, equiláteras y equiángulas. Pero de dichas noventa líneas, treinta son comunes a las doce bases de las pirámides pentagonales, que, por lo tanto, son asimismo pentagonales. Y esas bases son del dodecaedro regular interior, que está formado por ellas, y sólo puede captarlo el intelecto, mediante la imaginación. Estas treinta líneas comunes intervienen sólo en la formación de los veinte ángulos sólidos deprimidos que, como se ha dicho, son hexagonales, es decir, que en su formación concurren seis líneas. Dicho cuerpo está formado por el mencionado dodecaedro regular interior y por doce pirámides lateradas, equiláteras y equiángulas, de altura igual, cuyas bases son las mismas del cuerpo interior, *ut supra*.

XXXIII-XXXIV. — El dodecaedro absciso elevado, sólido o hueco, tiene ciento ochenta lados o líneas, sesenta de las cuales se elevan originando pirámides pentagonales; otras sesenta se

elevan constituyendo pirámides triangulares, y las sesenta restantes son bajas y son lados de cada una de dichas pirámides, es decir, las pentagonales y las triangulares. Este cuerpo se compone del dodecaedro cortado plano interior, que se ofrece a nuestro intelecto únicamente a través de la imaginación, y, además, de treinta y dos pirámides, de las cuales doce son pentagonales y de igual altura, y las otras veinte triangulares, también de igual altura. Las bases de dichas pirámides son las superficies de dicho dodecaedro trunco y cada una de ellas corresponde a su cuerpo respectivo, es decir, las triangulares a las pirámides triangulares y las pentagonales a las pirámides pentagonales. Dicho cuerpo, cuando cae en un plano, se queda siempre apoyado sobre tres puntas o conos piramidales. De estos conos, uno es de pirámide pentagonal y los otros cinco son de pirámides triangulares. Al respecto, a simple vista, parece absurdo que tales puntas estén a un mismo nivel. Y esto, excelso Duque, al estar colgado [el cuerpo], requiere grandísima abstracción y profunda ciencia; y sé que quien entiende [de tales cosas] no puede desmentirme. Se llega a medir este cuerpo con sutilísima práctica, máxime con el conocimiento de álgebra y almucabala. Podrás conocer dicha medida, pues en nuestra obra hemos cabalmente demostrado que puede conseguirse con procedimientos muy fáciles. De la misma manera puede calcularse el icosaedro cortado, en el cual intervienen hexágonos y pentágonos, figuras que dificultan todas las medidas.

CAPÍTULO LIII

DEL CUERPO DE VEINTISÉIS BASES PLANO SÓLIDO O HUECO, Y ELEVADO SÓLIDO O HUECO. SU ORIGEN. XXXV-XXXVI. — Otro cuerpo, excelso Duque, muy distinto de los nombrados es el que se llama cuerpo de veintiséis bases, cuyo origen y principio es muy hermoso. De ellas, dieciocho son cuadradas, equiláteras y rectángulas, y ocho son triangulares equiláteras y equiángulas. Este cuerpo tiene cuarenta y ocho lados o líneas, y noventa y seis ángulos superficiales, de los cuales setenta y dos son todos rectos, y son los de las ocho bases cuadradas, y veinticuatro agudos, y son los de sus ocho triángulos equiláteros. Estos noventa y seis ángulos concurren entre sí, formando en él veinticuatro ángulos sólidos, cada uno de los cuales consta de un ángulo superficial correspondiente a un triángulo y tres ángulos rectos, correspondientes a tres cuadrados. De las cuarenta y ocho líneas de este cuerpo, veinticuatro son comunes a los triángulos y a los cuadrados, pues de sus dieciocho cuadrados, debidamente unidos entre sí, resultan por fuerza aquellos ocho triángulos, formados de la manera que se ha dicho arriba para los otros cuerpos abscisos. El origen de este cuerpo es el hexaedro uniformemente cortado en todas sus partes[65], según muestra también a la vista su forma material. Su conocimiento resulta utilísimo en muchos aspectos para quien tenga que aplicarlo, especialmente en arquitectura. Esto es lo que se refiere al

conocimiento del respectivo cuerpo sólido plano, o hueco.

XXXVII-XXXVIII. — El cuerpo de veintiséis bases, sólido o hueco, elevado, tiene en su formación, ciento cuarenta y cuatro líneas, las que, unidas según oportuna exigencia, originan en él doscientos ochenta y ocho ángulos superficiales y veintiséis ángulos sólidos elevados, piramidales, dieciocho de los cuales están contenidos, cada uno, por cuatro ángulos agudos superficiales, y ocho están contenidos por tres agudos. Dicho cuerpo está compuesto por veintiséis pirámides lateradas, de las cuales dieciocho cuadrangulares y ocho triangulares, que a su alrededor y en la parte externa están todas a la vista, y por el mencionado cuerpo de veintiséis bases, sólido, plano e interior, que sólo puede percibirse mediante la imaginación. Sus veintiséis bases son también las bases de las veintiséis pirámides, de este modo: las dieciocho cuadrangulares [son bases] de las dieciocho pirámides lateradas cuadrangulares y las ocho triangulares [lo son] de las ocho pirámides triangulares. De cualquier manera que se le haga caer sobre un plano, se queda apoyado siempre sobre tres puntas o conos, según mostrará también a la vista la experiencia de su forma material.

CAPÍTULO LIV

DEL CUERPO DE SETENTA Y DOS BASES PLANO SÓLIDO Y HUECO. XXXIX-XL. — Entre estos cuerpos, excelso Duque, conviene colocar el cuerpo llamado de setenta y dos bases que nuestro filósofo megarense describe ampliamente en la decimocuarta de su duodécimo[66]. Este cuerpo, aunque tiene sus bases planas laterales y angulares y deformes, no puede decirse que dependa o derive de ninguno de los cuerpos regulares, sino que se forma y crea, conforme a lo que demuestra nuestro filósofo en dicho lugar, mediante la figura dodecagonal, es decir, de doce lados. De dichas bases, cuarenta y ocho son cuadrangulares, no equiláteras ni equiángulas, y tienen los dos lados opuestos dirigidos hacia uno y otro polo o cono, y del otro son iguales entre sí. Sus otras veinticuatro bases son triangulares y no equiláteras ni equiángulas; doce de ellas están alrededor de uno de los conos y doce alrededor del otro. Cada una de ellas tiene dos lados iguales, que son los que se dirigen al polo inferior y al superior. De tal cuerpo se podrá, además, formar siempre un correspondiente elevado, como se ha hecho en los otros; pero, por la deformidad de sus bases, será difícil su conocimiento, aunque tendría, para nuestra vista, no mediocre gracia. En él se originarían setenta y dos pirámides (de acuerdo con el número de sus setenta y dos bases), cuyas bases serían también las del cuerpo; éste estaría dentro, imaginariamente. No me he preocupado por deducir la forma de ese cuerpo elevado,

para dejar al lector la tarea, pues confío en su inteligencia. Dicho cuerpo de setenta y dos bases lo emplean muy frecuentemente los arquitectos en la construcción de edificios, por ser forma que se presta mucho, máxime donde hay que hacer tribunas u otras bóvedas o cielos. Y aunque no siempre en dichos edificios se emplea ese número de caras, sin embargo los arquitectos se valen de la imitación de dicho cuerpo, tomando de él una cuarta o tercera parte, en todas las formas, según el lugar y la posición donde se proponen edificar. Así hay muchísimas construcciones, en distintas partes; como se ve en el caso del inestimable templo antiguo del Panteón, que hoy los cristianos llaman la Rotonda, en la capital del mundo.

Ese templo fue dispuesto con tanta habilidad y esmero y aplicando tales proporciones que la luz de una sola abertura en su techo basta para iluminarlo enteramente y con gran esplendor. Paso por alto muchas otras famosas e ínclitas ciudades como Florencia, Venecia, Padua, Nápoles y Bolonia, en las cuales se han construido muchos edificios, sacros o profanos, grandes o pequeños sobre el modelo de ese templo. También aquí en su Milán, en el devoto lugar de Santo Scettro, la espléndida capilla está formada por una parte cortada de ese templo, [es decir, del Pantheon,] con la salvedad de que ha sido adaptada a la curvatura de la pared, con el agregado de rosetones en las bases, como ornamentos. Y en vuestro devoto templo [de Santa María] delle Grazie la tribuna correspondiente al altar principal y las laterales no son sino una parte similar de ese templo también con los mismos agregados, para mayor adorno. Si bien muchos fabrican y trazan formas arbitrariamente, pues de VITRUVIO no tienen mayor conocimiento que de cualquier otro arquitecto, sin embargo aplican el arte aunque no lo sepan, del mismo modo que se dice que rústicos campesinos *solegizant et nesciunt se solegizare*, así estos *utunt arte et nesciunt se uti*. También el sastre y el zapatero aplican la geometría y no saben

qué es. Del mismo modo albañiles, carpinteros, herreros y toda clase de artesanos emplean la medida y la proporción sin saberlo, pues como ya se ha dicho otras veces todo se basa en el número, peso y medida.

Pero ¿qué decir de los modernos edificios, en su género, ideados y dispuestos de acuerdo con distintos modelos que por su pequeñez ofrecen aspecto gracioso y que cuando luego se construyen no soportan el peso, y muy lejos de durar mil años, ya al tercero se caen en ruinas? Sus constructores, por no entender nada, hacen gastar más para rehacer que para hacer; y se llaman arquitectos y nunca vieron ni por las tapas el excelentísimo volumen de nuestro muy digno arquitecto y gran matemático VITRUVIO, quien escribió sobre arquitectura, dando insuperables enseñanzas sobre toda clase de construcciones. Quien se aparta de dicho autor zapa en el agua y echa cimientos en la arena, y muy pronto malogra el arte. Hay arquitectos de renombre que no conocen la diferencia que hay entre el punto y la línea, aunque sepan la de los ángulos. Tales conocimientos son imprescindibles para poder edificar bien; y esto lo demuestra, como dice nuestro VITRUVIO, el sumo alborozo y gran alegría que tuvo PITÁGORAS cuando con ciencia segura halló la verdadera proporción de las dos líneas que contienen el ángulo recto de la escuadra, por lo cual, sacrificando en homenaje a los dioses, inmoló cien bueyes.

Este ángulo es de tal excelencia que nunca puede variarse y con otro nombre los más grandes geómetras lo llaman *angulum iustitiae*, pues sin su conocimiento no es posible distinguir el bien del mal en ninguna de nuestras obras y sin él jamás puede obtenerse medida segura alguna. De ahí que a los modernos zapateros, en sus edificios, les parece que no concluyen nada si, apartándose de la recta y debida norma antigua, no introduce de modo inconveniente alguno de sus desatinos, censurando a quienes (pues los hay todavía) tratan de seguir la verdadera

norma antigua. Hay también quienes gustan de nuestras disciplinas matemáticas, buscando para sus edificios la verdadera guía en las obras de nuestro VITRUVIO. Y por apartarse de él se ve cómo están nuestros edificios, divinos y profanos: el que no está torcido, lo está doblemente. Por eso resulta muy conveniente la palabra de Vuestra Alteza y su efecto en esta ciudad, pues paulatinamente, y continuando lo que ya ha empezado, Vuestra Alteza hará a su Milán no menos bella de lo que es Florencia, eliminando la abominable e inepta influencia de esos autores. Pues, en verdad, Vuestra Alteza entiende más de tales cosas, dormido, que ellos despiertos con mil ojos, tal como lo demostró su estrecho pariente el Ilustrísimo DUQUE DE URBINO, en la admirable construcción de su digno y ya nombrado palacio. Y esto con el perdón de aquellos que tomaren a mal lo que hasta aquí se ha dicho para su enseñanza. Baste esto en lo que respecta a dicho cuerpo.

CAPÍTULO LV

DE CÓMO SE FORMAN OTROS CUERPOS ADEMÁS DE LOS MENCIONADOS Y CÓMO SUS FORMAS SE DESARROLLAN AL INFINITO. No me parece oportuno, excelso Duque, extenderme especialmente sobre esos cuerpos, pues su desarrollo tiende al infinito por el continuo y sucesivo corte de sus ángulos sólidos, con que sus formas se multiplican. Así podrá continuarlo Vuestra Ducal Alteza, pues el camino está abierto por los cuerpos ya indicados, ya que, según siempre se ha dicho, *facile est inventis addere*: no es difícil agregar a lo que ya se ha encontrado, y por tanto, quitando o agregando en más y en menos a las formas antedichas, será fácil lograrlo para todo propósito. Hasta ahora hemos proseguido con el solo fin de mostrar cómo las virtudes de esos cinco cuerpos regulares se van destilando siempre a los otros cuerpos dependientes, a semejanza de los cinco cuerpos simples que entran en la formación de todo cuerpo compuesto creado.



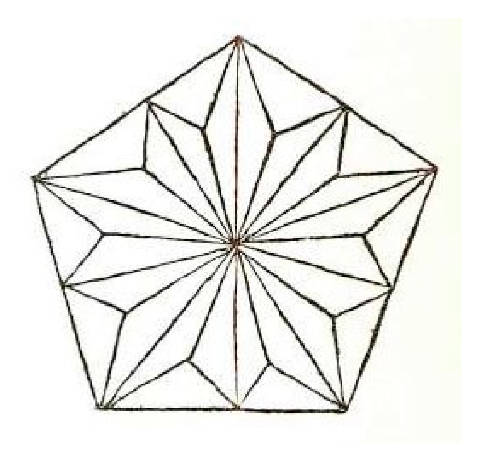
LUCA PACIOLI



La Virgen, el Niño y Santos, con Federigo da Montefeltro, Duque de Urbino, en actitud de orante arrodillado: cuadro de Piero della Francesca. Luca Pacioli sirvió de modelo para uno de los santos, el segundo de pie, a la derecha.

Por eso, según indicamos arriba, PLATÓN se vio impelido a asignar las cinco formas regulares a los cinco cuerpos simples, es decir, la tierra, el fuego, el aire, el agua y el cielo, como aparece en el *Timeo*, donde se trata de la naturaleza del universo. Al elemento tierra atribuyó la forma cúbica es decir, la del hexaedro, pues ninguna figura necesita mayor violencia para moverse, y, entre todos los elementos que existen, ninguno es más fijo, constante y firme que la tierra. La forma del tetraedro la atribuyó al elemento fuego, pues éste, volando hacia arriba, origina la forma piramidal, tal como nos lo muestra la vista,

pues vemos que, ancho y uniforme por debajo, va adelgazándose hacia arriba, de manera que la llama, en lo alto, termina en punta como el cono de toda pirámide. La forma del octaedro la atribuyó al aire, pues así como el aire, para un pequeño movimiento, sigue al fuego, de la misma manera la forma octaédrica, por su facilidad para moverse, sigue a la forma de la pirámide. La forma de veinte bases, es decir, el icosaedro, la asignó al agua, pues estando limitada por más bases que ningún otro cuerpo, le pareció que en la esfera se adaptaba más al movimiento de la cosa que desciende derramándose que no a la que asciende. La forma de doce bases pentagonales la atribuyó al cielo, como que éste es receptáculo de todas las cosas, de la misma manera que el dodecaedro es receptáculo y albergue de todos los otros cuatro cuerpos regulares, como se ve por la inscripción de un cuerpo en otro y además, como dice ALCINOO con respecto al *Timeo* de PLATÓN, porque así como en el cielo hay doce signos del zodíaco y cada uno de ellos se divide en treinta partes iguales, siendo toda su anual revolución de trescientos sesenta, de la misma manera este dodecaedro tiene doce caras pentagonales, y cada una de ellas se resuelve en cinco triángulos con la punta en el centro, y cada uno de dichos triángulos se divide en seis escalenos, lo que da treinta triángulos en cada base y entre todas trescientos sesenta como el zodíaco. Tales formas son muy recomendadas por el celebérrimo filósofo CALCIDIO, en su exposición del citado *Timeo*, y también por MACROBIO, APULEYO y muchísimos otros, pues en verdad son dignos de la mayor recomendación, por las razones señaladas en su



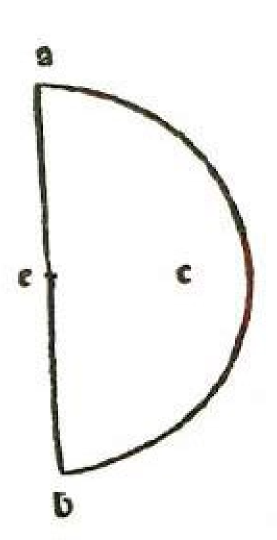
construcción, que muestran que la suficiencia de esas cinco formas, como también la de los cinco cuerpos simples, no puede ser de ninguna manera mayor, y así como el número de tales cuerpos simples no puede aumentar en la naturaleza, del mismo modo no es posible señalar, fuera de los cinco cuerpos regulares, otros que sean de bases, lados y ángulos, la toquen todos los demás. En efecto, si se pudiera señalar en la naturaleza un sexto cuerpo simple, el Sumo Hacedor se encontraría menoscabado y merecedor de que se le juzgara falto de prudencia, pues no habría previsto todas las necesidades naturales. Por esto, sin duda, y no por otra razón, entiendo que PLATÓN, según dijimos, atribuyó tales elementos a cada uno de los cuerpos simples, argumentando de esa manera como extraordinario geómetra y profundísimo matemático. Viendo que las cinco distintas formas de estos cuerpos no pueden de ninguna manera imaginarse como no sea tendiendo hacia el cuerpo esférico, con bases y ángulos iguales según se ha dicho, de acuerdo con lo que se demuestra en la penúltima del decimotercero, oportunamente señalado para nosotros, con justa razón arguyo que tales formas conducían a los cinco cuerpos simples y que de ellas dependía toda otra forma. Aunque esos cinco cuerpos se llaman sólidos regulares, con todo no se excluye que la esfera sea el más regular de todos los cuerpos y que todo otro cuerpo derive de ella como de la más sublime causa de las causas. En ella no hay variedad alguna, sino uniformidad por todas partes, y en cada lugar está su principio y su fin, su derecha y su izquierda. A continuación, poniendo fin al examen de los cuerpos dependientes que hemos señalado, diremos dónde se origina su forma; y hablaremos sucesivamente de todos los demás cuerpos oblongos, es decir, más largos que anchos.

CAPÍTULO LVI

DEL CUERPO ESFÉRICO Y DE SU FORMACIÓN. LIX — Muchos han definido qué es una esfera; en primer lugar DIONISIO, digno matemático. Nuestro autor la describe también, con suma brevedad, en su undécimo libro[67], y esa descripción la repiten todos los tratadistas posteriores. Dice así: “esfera es el cuerpo contenido por la huella que deja un arco de circunferencia correspondiente a la mitad de un círculo, siempre que —en cualquier forma se tome el semicírculo y teniendo firme la línea del diámetro— se le haga girar alrededor hasta que vuelva al lugar desde donde empezó a moverse. Es decir, trazada una semicircunferencia sobre una línea cualquiera, teniendo firme ésta hágase describir al semicírculo una vuelta, y el cuerpo así originado se llama esfera. Su centro es el centro de dicho semicírculo, que se ha hecho girar de la manera indicada”.

Sea *c* el círculo construido sobre la línea *ab*, con centro en el punto *e*, y sea todo su arco la parte de la circunferencia *adb*; digo que, si se mantiene firme la línea *ab*, diámetro del semicírculo, y se hace girar alrededor de ella el semicírculo partiendo del punto *d*, siguiendo hacia abajo y volviendo hacia arriba con su arco, hasta el mismo punto *d* desde donde empezó a moverse o al contrario girando hacia la parte superior y volviendo hacia la inferior, también con el arco, hasta dicho punto *d*, ese cuerpo redondo formado por el semicírculo con su revolución se llama cuerpo esférico o esfera, para lo cual hay que

imaginar que dicho semicírculo es, *gratia exempli*, una media bandeja material, pues de otra manera no formaría cuerpo alguno, ya que, si se hace girar únicamente el arco, no dejará huella, por ser una línea sin ancho ni profundidad. Y esto en lo que se refiere al conocimiento y origen de dicho sólido.



CAPÍTULO LVII

CÓMO SE COLOCAN EN LA ESFERA LOS CINCO CUERPOS REGULARES. ℌ En esta esfera podemos suponer colocados los cinco cuerpos regulares, del siguiente modo. En primer término trataremos del tetraedro. Si sobre la superficie de la esfera, es decir, sobre su revestimiento, marcamos o nos imaginamos cuatro puntos equidistantes uno de otro en todos los sentidos, y los unimos con seis líneas rectas, que necesariamente pasarán por dentro de la esfera, se formará en ella, exactamente, el cuerpo que nos proponíamos. Y si, con la imaginación, cortamos la esfera mediante superficies planas, siguiendo dichas líneas en todos los sentidos, quedaría al descubierto justamente el tetraedro. Si la esfera —para usar un ejemplo que facilite la comprensión a los demás— fuese una piedra de bombarda y sobre ella se marcaran los cuatro puntos equidistantes, y si un cantero, con sus instrumentos, la desbastase y facetara, dejando sólo esos cuatro puntos, habría transformado la piedra en tetraedro. De igual manera, si en la superficie esférica se marcan ocho puntos equidistantes entre sí y se los une con doce líneas rectas, se habrá colocado imaginariamente en dicha esfera el segundo cuerpo regular, llamado hexaedro o cubo, es decir, la figura del diabólico instrumento que se llama dado.

Si estos puntos se marcan también en una piedra de bombarda, según dijimos, y un cantero los une en la forma

arriba indicada, habrá reducido la bola a la forma del cubo. Y si en esa superficie se marcan seis puntos, también equidistantes entre sí como se ha dicho, y se unen con doce líneas rectas, se habrá construido exactamente en la esfera el tercer cuerpo regular, llamado octaedro. Y si un cantero hace en una piedra lo que antes dijimos, transformará la bola en el cuerpo de ocho caras triangulares. De la misma manera, si se marcan doce puntos y se unen con treinta líneas rectas, se habrá colocado, *similiter*, en dicha esfera el cuarto cuerpo, llamado icosaedro. Procediendo como hemos dicho, un cantero reducirá la piedra al cuerpo de veinte caras triangulares. Si se marcan de la manera indicada veinte puntos y se unen también con treinta líneas rectas, se formará en dicha esfera el quinto y nobilísimo cuerpo regular llamado dodecaedro, es decir, el cuerpo de doce caras pentagonales; y procediendo como hemos dicho, el cantero haría de la bola esa misma forma. Así estarían imaginariamente colocados en la esfera todos los cuerpos, de manera que sus puntos angulares estarían situados en la superficie esférica, y si uno de sus ángulos tocara la superficie esférica también la tocarían los demás, y no sería posible de ninguna manera que uno la tocara sin que la tocasen los otros, cuando tales cuerpos se colocaran en la esfera. Por esta ciencia infalible Vuestra Alteza podrá a veces —como hemos hecho nosotros— divertirse a costa de dichos canteros aprovechándose de su ignorancia de esta manera: ordenándoles que de piedras semejantes a éstas hagan alguna forma de lados, caras y ángulos iguales y que ninguna sea semejante a las formas de los cinco cuerpos regulares, obligándolos, *verbi gratia*, a hacer un capitel o una base o un cimacio a alguna columna, que sea de cuatro o de seis caras iguales, de la manera indicada, y que las de la forma de cuatro no sean triangulares o que las de la forma de seis no sean cuadradas. Lo mismo de ocho y veinte caras y que ninguna sea triangular, o bien de doce y que ninguna sea pentagonal, cosas

que son todas imposibles. Pero ellos, como temerarios bravucones que son, prometerán mares y montes, pues hay muchos que no saben ni se preocupan por aprender, contrariamente al precepto moral que dice: *Ne pudeat quae nescieris te velle doceri*. Como el caso de aquel carpintero que, preguntado sobre qué haría si no hubiese cepillo, contestó que haría uno con otro cepillo. Otro tonto dijo que su escuadra era demasiado grande para ajustar una escuadra pequeña, pues creía que los ángulos rectos variaban entre sí. Y otro puso frente a sus ojos dos varillas en forma de *tau*, es decir, así: T, y juzgaba que ya una, ya otra, era la más larga. Bobos así hay muchos más. Conversando con uno de éstos, en tiempo en que se edificaba el palacio de la buena memoria del conde GIROLAMO, en Roma, mientras en su presencia se hablaba, como suele suceder, de la construcción, y estando allí en su compañía gran número de dignas personas de distintas facultades, entre otros el entonces renombrado pintor MELOZZO DA FORLÍ, por el placer de especular, MELOZZO y yo exhortamos al conde a que mandase hacer cierto capitel en una de estas formas, sin aclararle la dificultad, sino sólo diciéndole que sería cosa de ver. Asintió a esto el conde, llamó al maestro y le preguntó si sabía hacerlo. Aquél contestó que era cosa de poca dificultad y que lo había hecho otras veces, por lo que el conde sospechó que no fuera nada que valiese la pena como le asegurábamos. Nosotros insistimos en lo mismo, agregando abiertamente que no podría hacerlo, por la imposibilidad señalada más arriba. Volvió el conde a llamar al cantero —que por entonces era todavía de los renombrados— y volvió a preguntarle si lo haría; entonces el cantero, casi mofándose, sonrió brevemente y dijo que siempre estaba dispuesto a comprometerse, tanto para el sí como para el no. El conde le dijo: "Si no lo haces, ¿qué quieres perder?", y él atinadamente contestó: "Señor, la misma cantidad que a juicio de Vuestra Señoría Ilustrísima yo pueda ganar". Y así quedaron

de acuerdo, concediéndole el conde el término de veinte días, y él pidiendo sólo cuatro. Sucedió que echó a perder muchos mármoles, sin poder lograr nada; finalmente el conde no lo obligó sino a pagar el costo de las piedras, y el tallador quedó humillado. Pero nunca cejó en averiguar el origen de la propuesta. Supo que había sido el fraile, de modo que me guardó no poco rencor. Encontrándome un día me dijo: "Caballero… caballero, no os perdono la jugada que me hicisteis si no me enseñáis la manera de hacerlo". Yo me le ofrecí en todo lo que podía y, quedándome varios días en Roma, no lo defraudé, y le descubrí estas y otras cosas que le interesaban; y él quiso cortésmente que me llevara una valiosa capa en recuerdo suyo. Por eso digo que cosas como éstas pueden proporcionar a Vuestra Alteza la oportunidad de hacer que otros se den cuenta de su error y no se vengan con tantos alardes, como despreciando a todos los demás. Así hizo HIERÓN con el poeta SIMONIDES, según cuenta CICERÓN en *De natura deorum*. SIMONIDES se comprometió temerariamente a decir con exactitud, en el término de un día, qué era Dios, afirmando que no era difícil de conocer lo que otros decían serlo. Terminado dicho plazo, HIERÓN le preguntó si lo había encontrado; SIMONIDES dijo que todavía no, y que le concediera algún tiempo más. Después del plazo, volvió a contestar lo mismo y, *breviter*, interpuestos varios plazos, confesó que entendía menos que antes, y se quedó así confundido de su temeridad. Y esto es lo que se refiere a la esfera y a la colocación de los cuerpos en ella.

CAPÍTULO LVIII

DE LOS CUERPOS OBLONGOS, ES DECIR, MÁS LARGOS O ALTOS QUE ANCHOS. ☙ A continuación, oh excelso Duque, para pleno conocimiento de este nuestro tratado, tenemos que decir algo sobre los cuerpos oblongos, es decir, sobre aquellos que son más largos o altos que anchos, como las columnas y sus pirámides. De éstas hay varias clases. Pero antes hablaremos de las columnas y de su origen y luego de sus pirámides. Las columnas son de dos suertes, redondas y lateradas, así como entre las figuras llanas algunas son curvilíneas, y son las que están contenidas por líneas curvas o torcidas, y otras se llaman rectilíneas, y son las que están contenidas por líneas rectas. La columna redonda es un cuerpo contenido entre dos bases circulares e iguales, que son equidistantes.

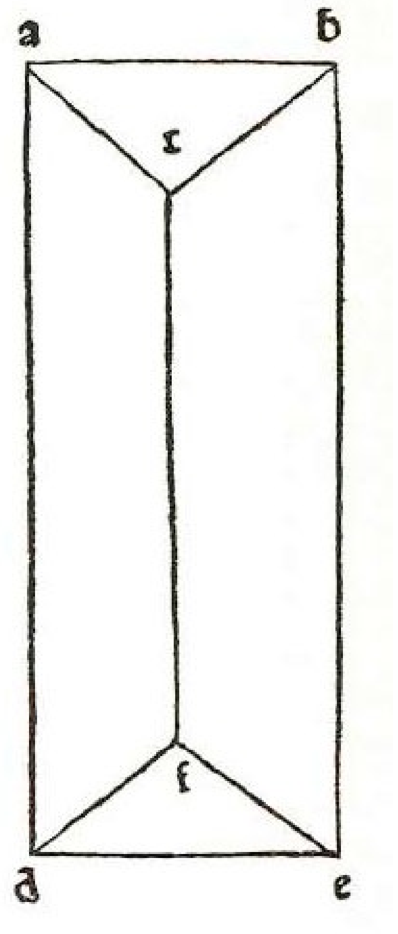
La ha definido nuestro filósofo, en el libro undécimo[68], así: “la figura redonda corpórea, cuyas bases en la extremidad son dos círculos planos iguales en grosor, es decir altura, es la huella del paralelogramo rectangular cuya superficie, quedando firme el lado que contiene el ángulo recto, se haga girar hasta que vuelva a su sitio”. Llámase dicha figura columna redonda. Así, el centro de la columna redonda, el de la esfera y el del círculo serán un solo centro. *Verbi gratia*: sea el paralelogramo *abcd*, es decir, una superficie cuadrangular de lados equidistantes y ángulos rectos. Afírmese el lado *ab* y, una vez afirmado, hágase

girar el paralelogramo hasta que vuelva al lugar desde donde empezó a moverse. La figura corpórea descrita por el movimiento de este paralelogramo se llama columna redonda, y sus bases son dos círculos. El centro [de uno de los círculos] es el punto *b*; el otro círculo es el que resulta de la línea cuando se mueve o gira, y su centro es el punto *a*. Se llama eje de esta columna la línea *ab*, que queda firme en el movimiento del paralelogramo. Ahora bien, si imaginamos que el paralelogramo *abcd*, cuando con su girar llegue al lugar *abef*, se prolonga hasta el lugar desde donde empezó a moverse, continuando la superficie plana, es decir, formando todo un paralelogramo *dcef*, y suponemos que en él hemos tirado el diámetro *de*, tal diámetro *de* será también diámetro de la columna. Cuando se dice que el centro de la columna, el de la esfera y el del círculo son uno mismo, debe entenderse cuando tienen el mismo diámetro; hemos dicho, por ejemplo, que *de* es diámetro de esta columna; entonces la esfera y el círculo cuyo diámetro sea la línea *de* tendrán necesariamente el mismo centro, que el de la columna propuesta. Sea, pues, la línea *de* que divide a la línea *ab* en el punto *g; g* será centro de la columna, pues divide el eje de la columna en partes iguales y también [se] divide en partes iguales el diámetro de la columna, según se prueba por la vigesimosexta del primero, pues los ángulos en *g* son iguales por la decimoquinta del primero, y los ángulos en *a* y en *b* son rectos por hipótesis. Además, la línea *ad* es también igual a la línea *be*; entonces *dg* es igual a *eg* y del mismo modo *ag* es igual a *gb*. Ahora bien, como los ángulos *c* y *f* son rectos, si sobre el punto *g*, según el espacio *dg*, y además sobre la línea *de* se hace un círculo, éste pasará por los puntos *c y f*, por la recíproca de la primera parte de la trigésima[69] del tercero. Así, pues, el punto *g* es centro del círculo cuyo diámetro es el de la columna, y por lo tanto también de la esfera, de donde manifiestamente resulta que a todo paralelogramo rectángulo puede circunscribirse el

círculo, y a toda columna la esfera. Se ve claro, de este modo, lo que proponía este teorema de nuestro filósofo en la citada definición de la columna redonda. Será suficiente lo que hasta aquí hemos dicho de ella; a continuación hablaremos de las columnas lateradas, tal como lo adelantamos.

CAPÍTULO LIX

DE LAS COLUMNAS LATERADAS Y EN PRIMER LUGAR DE LAS TRILÁTERAS.



LI-XLII. — Otra especie o suerte de columnas se llaman lateradas, la primera de las cuales es triangular, y sus bases, es decir, la superior e inferior, son dos triángulos igualmente distantes entre sí en toda su extensión, según la altura de la columna, como la representada aquí. La base superior es el triángulo *abc*, y la inferior el triángulo *def*. Esta figura dice nuestro autor que se llama cuerpo *seratile* y se parece al tejado de una casa que tenga cuatro caras o paredes y cuyo tencho desagüe sólo por dos costados, como está a la vista; las bases pueden ser equiláteras y no equiláteras. Las tres caras de tales columnas son siempre paralelogramos, es decir, de cuatro lados, y rectangulares. De tal suerte, este cuerpo serátil está contenido

por cinco planos, tres de los cuales son cuadrangulares y dos triangulares.

CAPÍTULO LX

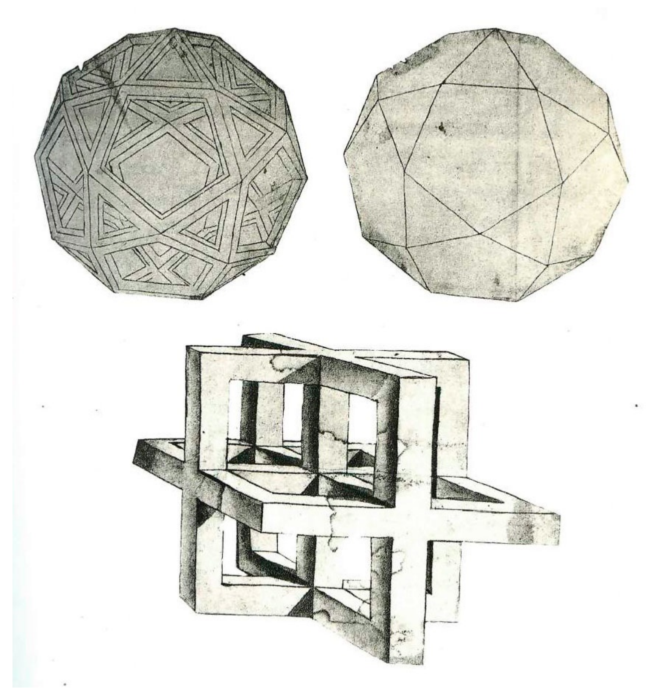
DE LAS COLUMNAS LATERADAS CUADRILÁTERAS.

XLV-XLVI. — ℋ La segunda suerte de columnas lateradas son las cuadriláteras, que tienen las dos bases cuadrangulares, y las otras cuatro superficies que las circundan son también cuadriláteras, equidistantes entre sí conforme a su oposición. También éstas son a veces equiláteras y a veces no, según la disposición de sus bases, pues entre las figuras planas, rectilíneas y cuadriláteras se señalan cuatro suertes. La primera, llamada cuadrado, es aquella que tiene todos los lados iguales y los ángulos rectos como la figura *a*, al margen. La segunda, llamada tetrágono alargado, es aquella que tiene los lados opuestos iguales y los ángulos también rectos; pero es más larga que ancha, como la figura *b*, al margen. La tercera suerte se llama *elmuaym*, y esta figura es equilátera, pero no rectangular, y con otro nombre se llama rombo; tal la figura *c*. La cuarta especie se llama "semejante al *elmuaym*" o, con otro nombre, romboide; sus lados opuestos son iguales y equidistantes entre sí, y no tiene ángulos rectos, como se ve en la figura *d*. Fuera de éstas, las demás figuras de cuatro lados se llaman *elmuarisas*, es decir, irregulares, como las señaladas con *e*. Ahora bien, conforme a estas diferentes bases, pueden variarse dichas columnas cuadriláteras, pero de cualquier manera se entiende que la equidistancia de sus bases corresponde a la altura. Estas columnas podemos llamarlas regulares, a semejanza de sus bases,

y las otras irregulares o *elmuarisas*.

CAPÍTULO LXI

DE LAS COLUMNAS LATERADAS PENTAGONALES. XLIX-L. — En tercer lugar están las columnas lateradas pentagonales, es decir, las de cinco caras, como aquí la figura *ab*; cada una de esas caras es tetragonal o cuadrilátera, y las bases de estas columnas son siempre dos pentágonos, es decir, dos figuras rectilíneas de cinco lados y cinco ángulos, pues en todas las figuras rectilíneas el número de los ángulos es igual al de los lados, y de otra manera no puede ser. Estas columnas son, además, equiláteras o no según que sus bases lo permitan, como poco antes se ha dicho de las lateradas cuadriláteras.



Dibujos de Loeonardo da Vinci. Códice Atlántico, folio 263 recto. Las dos figuras de arriba corresponden exactamente a dos de las incluidas en este libro.

En efecto, algunos pentágonos son equiláteros y equiángulos, y otros no equiláteros y por consiguiente no equiángulos; pero todo pentágono que tenga tres ángulos iguales entre sí, si es equilátero será necesariamente también equiángulo, como demuestra la séptima del decimotercero. Decimos esto porque pudiera ser que el pentágono tuviese lados iguales, con dos ángulos iguales entre sí, pero que no fuese todo equiángulo. Y estos dos pentágonos, el superior y el inferior, se entiende también que son equidistantes por la altura en dicha columna, tanto si las columnas son equiláteras como si no lo son. Ahora bien, excelso Duque, como las especies de columnas lateradas pueden aumentarse al infinito según las variedades de las figuras rectilíneas de más o menos lados, pues en toda columna laterada las dos bases, la superior y la inferior, deben necesariamente ser dos figuras rectilíneas semejantes, vale decir concordantes en el

número de los lados (no podría una ser triangular y la otra tetragonal), y además equiláteras y equiángulas la una con respecto a la otra, para uniformidad de las columnas, aunque originen otras variadas formas, a veces equiláteras y a veces no, por esto no me parece necesario extenderme más sobre dichas columnas, sino sólo recordar que su denominación se deriva siempre de las bases, es decir, que, según sean las bases, así se llamarán las columnas. *Verbi gratia*: si las bases son triangulares, como se dijo arriba para el cuerpo serátil, se llamarán triangulares; si las bases son tetragonales o cuadriláteras, se llamarán cuadrangulares, y si pentagonales serán pentagonales, y si de seis lados se llamarán hexagonales, *et sic de singulis*. Pero cualquiera sea la calidad de las bases, las caras de toda columna serán siempre tetragonales rectangulares. Para todo esto, las formas materiales muestran a simple vista cuanto se ha dicho en los párrafos cuyo índice numérico figura en las tablas correspondientes. También para lo que vendrá más adelante Vuestra Alteza podrá confrontar las figuras en perspectiva correspondientes al número del párrafo, según dijimos.

CAPÍTULO LXII

DEL MODO DE MEDIR TODA SUERTE DE COLUMNAS, Y EN PRIMER LUGAR LAS REDONDAS.

Creo que nos toca considerar ahora el modo conveniente de aprender a medir toda suerte de columnas, aunque de ello hemos tratado con amplitud en nuestra obra grande; aquí daré sucintamente a Vuestra Alteza una ligera referencia, ante todo de las columnas redondas, para las cuales esta regla es general. Empiécese por medir una de sus bases cuadrándola según el modo aproximado descubierto por el famoso geómetra ARQUIMEDES, que figura en su volumen bajo la rúbrica *de quadratura circuli* y que hemos incluido en nuestra obra grande con su demostración, en esta forma: encuéntrese el diámetro de la base y multiplíquese por sí mismo; del producto tómense los $^{11}/_{14}$, es decir, los once catorzavos, y, después de multiplicarlos por la altura de la columna, este producto será la masa corpórea de toda la columna. *Verbi gratia*, para que se aprenda mejor: sea la columna redonda *abcd*, y su altura *ac* o *bd* sea 10, y los diámetros de las bases, el uno *ab* y el otro *cd*, sean de 7 cada uno. Digo que para hallar la capacidad de esta columna y de toda otra similar, se toma uno de dichos diámetros, cualquiera que sea, *ab* o *cd*, pues no importa siendo iguales, es decir 7, y este 7 hay que multiplicarlo por sí mismo, y dará 49, y de este resultado tómense los $^{11}/_{14}$, lo que da 38 $^1/_2$. Multiplíquese esto por la altura o largo de toda la columna, es decir, por *bd* o *ac*

que supusimos igual a 10, lo cual dará 385. Diremos que ésta es toda la capacidad o área corporal de dicha columna. Quiere decir esto, oh excelso Duque, que si esos números significan brazas, lados son iguales al diámetro del círculo, es decir, a la línea *ef* que lo divide por la mitad pasando por el punto g, llamado centro de dicho círculo, como en el principio de su primer libro refiere nuestro filósofo. Y esto es lo que se refiere a las columnas redondas.

CAPÍTULO LXIII

DEL MODO DE APRENDER A CONSTRUIR TODAS LAS COLUMNAS LATERADAS. XLV-XLVI — Indicada la manera de medir las columnas redondas, indicaremos a continuación la de las columnas lateradas. También para éstas la regla señalada es general y precisa, es decir que hay que cuadrar siempre una de sus bases, cualquiera que sea, y multiplicar luego el resultado por la altura o longitud de la columna. Este último producto será justamente su masa corporal o capacidad, y, cualquiera sea el número de sus caras, nunca falla. *Verbi gratia*: sea la columna laterada tetragonal *ab*, y su altura sea 10, y sus bases 6 cada una, en todo sentido. Digo que hay que empezar por cuadrar una de dichas bases; por ser equiláteras, se multiplicará uno de los lados por sí mismo, es decir 6 por 6, que da 36, y ésta justamente es la superficie de la base. Ahora digo que hay que multiplicar ese resultado por la altura o longitud de toda dicha columna, esto es, por 10, y será 360, es decir, que ésas serán justamente las brazas o los pies de la cuadratura de dicha columna, de la manera que arriba se ha dicho para las columnas redondas. Asimismo, si sus bases fueren o no equiláteras o de otra manera irregulares, también según las normas que dimos en dicha obra se cuadrarían y se multiplicaría el producto por su altura, obteniéndose así infaliblemente en cada una el resultado buscado. Esta misma regla hay que aplicarla también para todas las demás, ya sean triangulares,

pentagonales, hexagonales o heptagonales, *et sic de singulis*. Es decir que según las condiciones de sus bases deben medirse antes éstas. Si son triangulares, por la regla de los triángulos; si pentagonales, por la regla de los pentágonos, y lo mismo si son hexagonales. Las reglas de estas formas y figuras se consignan en dicha obra nuestra, y por ser ésta fácilmente accesible, dada la copiosa multitud de ejemplares y su difusión universal, no me preocupo por repetirlas. Así pondremos fin a la consideración de dichas columnas, y a continuación hablaremos de sus pirámides.

CAPÍTULO LXIV

DE LAS PIRÁMIDES Y TODAS SUS VARIEDADES.

LVIII.— A continuación corresponde por orden, excelso Duque, hablar de las pirámides y de sus diversas especies, y en primer lugar de las que se llaman pirámides redondas, y luego sucesivamente de todas las demás. Para nuestro completo conocimiento, diremos, con nuestro filósofo en su libro undécimo[70], que la pirámide redonda es una figura sólida y es la huella de un triángulo rectángulo que, afirmado en uno de los lados que contienen el ángulo recto, gira hasta que vuelva al lugar de donde empezó a moverse. Si el lado afirmado es igual al lado que se hace girar, la figura será rectangular; si es más largo, será acutángula, y si es más corto, será obtusángula. El eje de dicha figura es el lado fijo o firme, y su base es un círculo. Este cuerpo se llama pirámide de la columna redonda. *Verbi gratia*, para que se entienda mejor lo dicho, sea el triángulo *abc*, cuyo ángulo *b* es recto, y sea *ab* el lado fijo. Afirmando dicho lado, hágase girar dicho triángulo hasta que vuelva al lugar de donde empezó a moverse. De esta manera, la figura corpórea descrita o formada por el movimiento de ese triángulo se llama pirámide redonda. De ella hay tres variedades o especies. En efecto una es rectángula, otra es acutángula y la tercera es obtusángula.

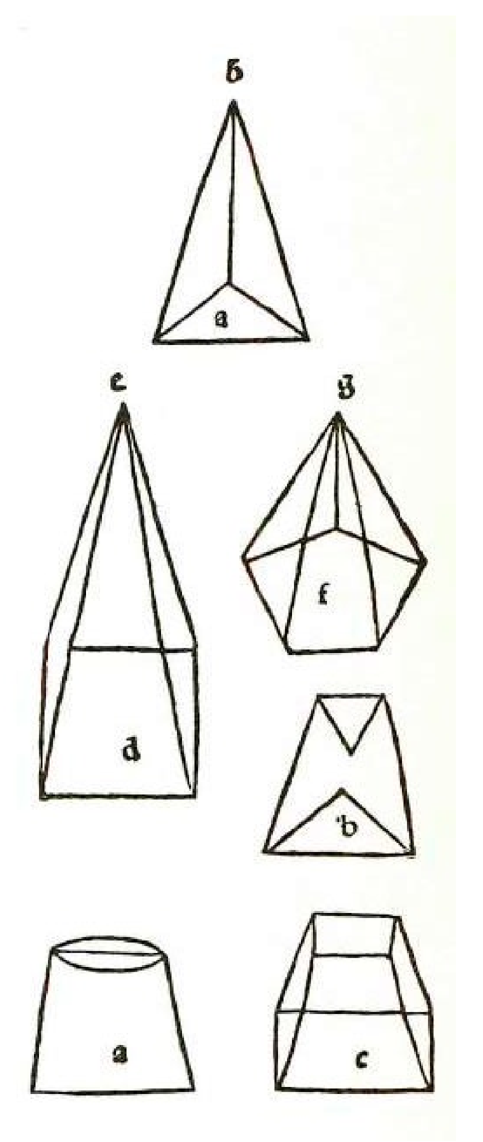
La primera se forma cuando el lado *ab* es igual al lado *bc*. Tenemos entonces que la línea *dc*, cuando girando el triángulo llega al lugar de la línea *bd* de manera que el punto *c* coincide

con el punto *d*, se torna una sola línea. Se entiende que ella entonces llega hasta el lugar desde donde empezó a moverse, conforme a la rectitud. Será ésta la línea *bed*. Como por la trigésimo segunda del primero y la quinta del mismo libro el ángulo *cab* es la mitad de un recto, el ángulo *cad* será recto, y por tanto esta pirámide se llamará pirámide rectangular. Pero si el lado *ab* es más largo que el *bc*, será acutángula, pues entonces, por la trigésimo segunda del primero y por la decimonovena del mismo libro, el ángulo *cad* será menor que la mitad de un recto, y por tanto todo el ángulo *cad* será menor que un recto, es decir, agudo. Dicha pirámide será, pues, acutángula. Si el lado *ab* es menor que el *be*, el ángulo *cab* será mayor que la mitad de un recto por la trigésimo segunda del primero y por la decimonovena del mismo libro, y todo *cad*, que es doble de *cab*, será mayor que un recto, y obtuso. Entonces la pirámide se llamará, convenientemente, obtusángula, y la línea *ab* se llamará eje de dicha pirámide; su base será el círculo descrito por la línea *bc* cuando se hace girar como dijimos, alrededor del centro *b*. Ésta se llama pirámide de la columna redonda, es decir, de aquella que resultaría de un paralelogramo que naciera de las dos líneas *ab* y *be*, estando fijo el lado *ab*, como arriba dijimos de la columna redonda. Esto bastará a nuestro propósito, con respecto a la pirámide redonda y sus variedades. Hablaremos de las otras.

CAPÍTULO LXV

DE LAS PIRÁMIDES LATERADAS Y SUS DIVERSIDADES. XLIII-XLIV — Las pirámides lateradas, oh excelso Duque, son de infinitas suertes, así como la variedad de las columnas de donde se originan, según veremos luego. Pero antes citemos, de nuestro filósofo, la declaración que figura en su libro undécimo, donde dice que la pirámide laterada es un cuerpo contenido por las superficies que, desde otra, se levantan hacia arriba hasta un punto opuesto. En efecto es de notar que en toda pirámide laterada todas las superficies que la circundan, exceptuada la base, se elevan hacia un punto que se llama cono de la pirámide, y todas estas superficies laterales son triangulares, y la mayoría de las veces su base no es triangular; como se ve aquí en la pirámide *a*, triangular, cuyo cono es b, y la pirámide *d*, cuadrilátera, y su cono *e*, y en la pirámide pentagonal *f* y su cono *g*. Y así, siguiendo, también para las demás; lo cual podrá verse mejor en sus correspondientes formas materiales, sólidas y huecas, marcadas con los números LI, LII, LIII, LIV y LV y al principio en este tratado, en plano y en perspectivas con los mismos números[71]. Tales pirámides se derivan de las columnas lateradas. De éstas hablamos arriba y se originan de este modo: determinemos un punto real en una de las bases de la columna laterada, o bien imaginemos ese punto y unámoslo, mediante líneas rectas, con cada uno de los ángulos rectilíneos de la otra base opuesta de dicha columna. Entonces quedará exactamente

formada la pirámide de dicha columna, contenida por tantas superficies triangulares cuantas sean las líneas o lados de la base de ese cuerpo. La columna y su pirámide se designarán con los mismos números, es decir, que si tal columna laterada es trilátera o triangular, también la pirámide se llamará trígona o triangular, y si la columna es cuadrilátera, también su pirámide se llamará cuadrilátera, y si pentagonal, pentagonal, *et sic de reliquis*. Se comprueba así, como antes dijimos con respecto a dicha columna laterada, que sus especies pueden multiplicarse al infinito según la diversidad y variación de sus bases rectilíneas; así decimos que debe suceder con sus pirámides lateradas, pues a cada columna o cilindro corresponde su pirámide, ya sea redonda o laterada. Ese punto así fijado en [correspondencia de] la base no necesita estar exactamente situado sobre el centro de la base; con tal que no se salga de ella, no importa, pues, trazando las líneas que dijimos, siempre se origina una pirámide, y se llama pirámide recta a nivel la formada por líneas dirigidas exactamente al centro, y las otras se llaman declinantes o inclinadas. Hay algunas otras, que se llaman pirámides cortadas



o truncas: son aquellas que no llegan exactamente al cono; les falta la cima y se llaman despuntadas o cortadas. Hay tantas especies de estas pirámides cuantas sean sus correspondientes pirámides enteras, y así también en cuanto a los nombres, redondas o lateradas, según figuran aquí dibujadas la redonda trunca *a*, la cortada triangular *b* y la cortada cuadrangular *c*. Y esto me parece suficiente para su conocimiento. A continuación hablaremos de la ingeniosa manera de medirlas.

CAPÍTULO LXVI

DE LA MANERA Y MÉTODO PARA MEDIR TODA PIRÁMIDE. ⁜ La cantidad y medida justa y precisa de toda pirámide entera, excelso Duque, ya sea redonda o laterada, se obtendrá de la cantidad de su columna, de esta manera: empezaremos por determinar el área o sea el espacio de la base de la pirámide que queremos medir, por medio de las reglas dadas más arriba, cuando hallamos la masa corporal de todas las columnas redondas y lateradas. Una vez hallada, la multiplicaremos por el eje, es decir, por la altura de dicha pirámide, y el resultado será la capacidad de la columna entera. De esta última tomaremos siempre ⅓, es decir, su tercera parte, y ése será justamente la cantidad corporal de la pirámide, y nunca falla. *Verbi gratia*: sea la pirámide redonda *abe*, cuya base es el círculo *be*, y cuyo diámetro es 7, y su eje *ad*, que es 10. Digo que lo primero será cuadrar la base, como se hizo arriba para la columna redonda, pues, como se ha dicho, las bases y las alturas de las columnas y de las pirámides son las mismas. Tendremos para la superficie de la base, 38 ½, que, multiplicado por el eje *ad*, es decir, por 10, dará 385 para la capacidad de toda la columna. Ahora, digo, tómese de esto ⅓, lo que da por resultado 128 ⅓, y éste será la cantidad de la pirámide. En efecto, hay que señalar que para que haya la precisión de que hemos hablado, en las redondas deben corresponder a un número conforme a la proporción que hemos encontrado hasta

ahora entre el diámetro y la circunferencia, y a la que antes hemos indicado entre 11 y 14. Dichas proporciones, según dijimos en aquel lugar, no son precisas, pero varían poco, como la que encontró ARQUIMEDES. Pero esto no excluye aquello que hemos dicho de que la cantidad de la pirámide redonda es justamente ⅓, aunque, ignorándose la cuadratura del círculo, no puede todavía expresarse exactamente con un número preciso; el que le corresponde es, de todos modos, ⅓. Dicha columna es el triple de ella, es decir, tres veces su pirámide, como se prueba por la novena del duodécimo. Pero todas las otras lateradas pueden señalarse con número justo, por ser rectilíneas sus bases. Lo mismo que se ha hecho para las redondas debe observarse para las lateradas, pues con respecto a estas, en la octava del duodécimo, se demuestra igualmente que son triples, es decir, tres veces su pirámide. Lo dicho será suficiente por lo que respecta a su medida.

CAPÍTULO LXVII

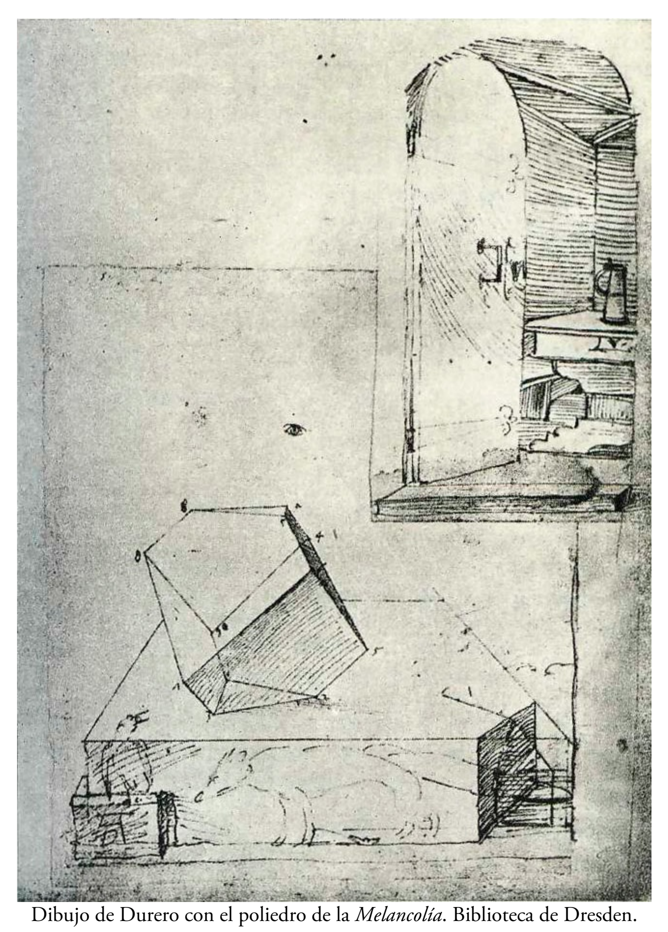
CÓMO SE DEMUESTRA CLARAMENTE QUE TODA PIRÁMIDE LATERADA ES LA TERCERA PARTE DE SU COLUMNA. ℈ En la sexta del duodécimo, oh excelso Duque, nuestro filósofo concluye que el cuerpo serátil, que es la primera especie de las columnas lateradas, como se ha dicho arriba, es divisible en tres pirámides iguales cuyas bases son triangulares, y, por consiguiente, que dicho cuerpo es el triple de cada una de ellas. Con igual evidencia se muestra que toda pirámide es la tercera parte de su cilindro o columna. De ahí nace la regla, dada más arriba, de que de la cantidad de toda la columna se toma $\frac{1}{3}$, lo cual está claro en el caso de las columnas rectilíneas, pues todas son resolubles en tantos cuerpos serátiles cuantos sean los triángulos en que pueden descomponerse sus bases, estando aquéllas compuestas de tantos cuerpos serátiles cuantos son tales triángulos, como se prueba en la octava del duodécimo. Así, pues, en la columna cuadrilátera, cuya base por ser cuadrilátera se resuelve en doce triángulos, trazando en dicha base la línea diagonal, es decir, desde un ángulo opuesto al otro, sobre tales triángulos podremos imaginar, y también construir de hecho, dos cuerpos serátiles, y, como cada uno es el triple de su pirámide, se sigue que esos dos cuerpos son tres veces sus respectivas pirámides. Pero los dos serátiles son toda la columna cuadrilátera, y por lo tanto las dos pirámides de los dos serátiles son $\frac{1}{3}$ de toda la columna, y estas dos pirámides equivalen

justamente, en total, a la pirámide de toda la columna, así como los dos cuerpos serátiles equivalen a toda la columna, por ser las dos partes iguales integrantes de la columna. De esta manera, la regla que hemos dicho, por todas las razones indicadas, no puede fallar. Lo mismo se verifica en toda columna laterada, y así en la tercera especie, llamada pentagonal, cuya base es resoluble en tres triángulos. Y por esto se ha dicho que toda la columna se resuelve en tres cuerpos serátiles, cada uno de los cuales es el triple de su pirámide, y por tanto los tres son triples con respecto a las tres pirámides, las tres pirámides en conjunto equivalentes a la pirámide de toda la columna, así como los tres serátiles forman toda la columna. Lo mismo dígase para todas las demás. Esta resolución de las bases en triángulos se demuestra en la trigésimo segunda[72] del primero, donde se concluye que toda figura poligonal, es decir, de varios ángulos y lados, puede resolverse siempre en tantos triángulos cuantos sean sus ángulos o sus lados, menos dos. *Verbi gratia*: la base cuadrilátera tiene cuatro ángulos, y por consiguiente cuatro lados; se resuelve, pues, en dos triángulos, por lo menos, es decir, en su resolución menor, que se da si en dicha figura se traza una línea recta desde uno de los ángulos al otro opuesto, como se ve aquí en la figura del tetrágono *abcd*, dividido en los dos triángulos *abd* y *bdc* por la línea *bd*, que en el arte se llama línea diagonal, y también diámetro. De este modo, la base pentagonal se resuelve por lo menos en tres triángulos, es decir, por regla general en un número de triángulos menor en dos que el de sus ángulos o lados. Esto podrá verse si desde uno de sus ángulos, cualquiera que sea, se tiran dos líneas rectas a los otros dos ángulos opuestos, como se representa aquí en la figura pentagonal *abcd*. Y ésta, si de su ángulo *a* se tiran líneas a los dos opuestos *c y d*, quedará resuelta en tres triángulos, *abe, acd* y *ade*, y cada una de dichas líneas se llama en el arte cuerda del ángulo pentagónico. De la misma manera las bases hexagonales se

resuelven en cuatro triángulos, *et sic de reliquis*. Por eso, excelso Duque, mucho debemos a los antiguos que con sus vigilias han iluminado nuestras mentes, máxime a nuestro EUCLIDES de Mégara, que recopiló y ordenó tantas cuidadosas demostraciones de sus predecesores, agregando las suyas, en estas excelentísimas ciencias y disciplinas matemáticas, según puede verse en todo su sublime volumen, en el cual se manifiesta su genio, más divino que humano, principalmente en su décimo libro, donde en verdad lo elevó tanto cuanto está permitido a un ser humano, y no puedo imaginar que pudiese haber llegado a decir nada más alto que aquellas líneas abstractísimas y racionales cuya ciencia es la más profunda de todas a juicio de quien se ocupa especialmente de ella. Con esto ponemos fin a lo que nos proponíamos decir sobre las pirámides enteras.



Melancolía de Durero



Dibujo de Durero con el poliedro de la *Melancolía*. Biblioteca de Dresden.

CAPÍTULO LXVIII

CÓMO SE MIDEN LAS PIRÁMIDES TRUNCAS. ❦ La medida de las pirámides truncas o despuntadas se encuentra mediante la de sus pirámides íntegras, a las cuales, como lo imperfecto a su perfecto, se reducen de esta manera: ante todo, convertiremos la pirámide trunca en pirámide entera llegando hasta su cono según el modo indicado en nuestra obra publicada, y esa pirámide entera la mediremos con los procedimientos explicados anteriormente, y tendremos así toda su capacidad, de la cual tomaremos nota. Luego mediremos aquella pirámide que agregamos a la pirámide despuntada para hacerla entera, también con los procedimientos indicados, y la cantidad de dicha pirámide la restaremos de la cantidad de toda la pirámide grande, que habíamos anotado. El resto es necesariamente la cantidad exacta de la pirámide trunca. De los demás procedimientos, éste es el más breve y más seguro, y, tanto si se trata de pirámides redondas como de lateradas, el procedimiento es el mismo.

CAPÍTULO LXIX

DE LA MEDIDA DE TODOS LOS OTROS CUERPOS REGULARES Y DE SUS DEPENDIENTES. ❧ A continuación debemos hablar de la medida de los cuerpos regulares y de sus dependientes; por tanto no me esforzaré en extenderme aquí en particular sobre dichos cuerpos regulares, pues acerca de ellos he compuesto especialmente un tratado para el ilustrísimo GUIDO UBALDO Duque de Urbino, pariente de Vuestra Ducal Alteza, en nuestra obra dedicada a S. S., siendo fácil al lector recurrir a ella por ser de utilidad común, como anteriormente se ha dicho, y por haber muchos ejemplares de ella en vuestra ínclita ciudad. Esa medida es tanto más especulativa cuanto que aquellos cuerpos son más excelentes y perfectos que los demás, y es materia de alto coturno y no para tontos. En aquel tratado hablamos de ello suficientemente. El modo de medir los otros cuerpos dependientes de éstos es semejante al indicado para las pirámides truncas, es decir, que hay que convertirlos en sus cuerpos enteros perfectos, y luego hay que medir éstos con todo cuidado, conforme a las reglas que dimos en el lugar indicado, y anotar la cantidad así obtenida. Luego, determinado lo que falta para el cuerpo entero, hay que medirlo también aparte, mediante las reglas de las pirámides, y el resultado hay que restarlo de la cantidad del correspondiente cuerpo entero regular, y el residuo será exactamente la cantidad de dicho cuerpo dependiente. Si dicho dependiente estuviere

entre los cuerpos abscisos, como el tetraedro absciso, al cual le faltan, en comparación con el cuerpo entero, las puntas, que son todas pequeñas pirámides iguales y uniformes, en tal caso, midiendo una de las pirámides, en seguida conoceremos por medio de ella todas las demás, según el número de sus lados o bases u otros elementos, conforme a lo cual hay que proceder siempre en la práctica. Obtenida la medida de dichas pirámides, las restarás del correspondiente cuerpo entero, según hemos dicho. Pero si dicho cuerpo dependiente fuere de los elevados, entonces para obtener su medida se agregará al correspondiente cuerpo perfecto la cantidad de todas aquellas sus pequeñas pirámides, que necesariamente serán tantas cuantas sean las bases de su cuerpo perfecto. Así, en suma hay que proceder con dichos cuerpos, teniendo presentes sus correspondientes perfectos, a los cuales se añadirá o sustraerá según dichas condiciones. Procediendo de otra manera se llegaría a un caos inextricable. Lo que acabamos de enseñar es lo apropiado para dichos cuerpos, pues confío en los peregrinos ingenios y en los especulativos intelectos dotados para estas facultades y para cualquier otra, a los que siempre hemos tenido presentes en el desarrollo de toda nuestra obra, máxime aquel que es, por excelencia y antonomasia, el más excelso entre todos: el de Vuestra Ducal Alteza, a quien de ninguna manera creo haber hablado en este discurso como a profano, ni de tales conocimientos ni de otros. En efecto, Vuestra Alteza está dotado y adornado de todas las virtudes, de manera que si quisiese yo referirme a ellas por extenso, no sólo el papel sería insuficiente, sino la vida entera. *Sed quod patet expresse non est probare necesse*. Con su mirar, sana y alegra toda vista turbada, y es verdaderamente como el sol que calienta e ilumina el uno y el otro polo. ¿Y qué más puede decirse hoy de Vuestra Alteza entre los mortales, sino que es paz y confortación, no sólo de Italia, sino también de toda la cristiandad?

A todos se muestra grande, espléndido, magnífico y magnánimo. En Vuestra Alteza hay misericordia, piedad, magnificencia. Aunque inferiores en la bondad de sus creaciones, DEMÓSTENES, CICERÓN y QUINTILIANO se unen en Vuestra Alteza, en su boca, que es fuente de donde se derrama tan largo río, néctar para los buenos y, para los malos, severo cuchillo. Vuestra Alteza cumple fielmente con la religión; no sólo es restaurador sino también fundador de templos. Y está siempre dedicado al diurno oficio divino, no con menor reverencia que la que guardan en tal oficio prelados sacratísimos, como lo demuestra su devota capilla, dedicada al culto divino y dotada de dignísimos cantores, con sus otras peculiares devociones. A todo suplicante, máxime si es piadoso, Vuestra Alteza le presta, sin demora, piadosos oídos, y vuestra bondad no sólo socorre al que pide, sino que las más veces se adelanta liberalmente al ruego. De ahí que en nuestro tiempo, y no inmerecidamente, Aquel que jamás vio cosa nueva os escogiera a vos, entre todos los demás, para hacernos partícipe del universo de sus gracias. Y por eso, con no menor acierto que Octaviano cuando erigió en Roma su templo la paz universal, ha construido Vuestra Alteza su sacratísimo templo [de Santa Maria] delle Grazie en su ínclita ciudad de Milán, en recuerdo de tantas gracias recibidas, no dándose tregua en adornarlo en toda forma y satisfacer adecuadamente todos sus requisitos. Ruego al lector no atribuya este sucinto discurso al afán de adular, al cual soy del todo ajeno, tanto por naturaleza como por mi profesión; pues si hiciera yo otra cosa, así como en mí habría adulación, en ti, lector, habría no menos envidia y rencor hacia Su Alteza, y no sentirías admiración ante tantas excelencias y celestes dones; *sed quod oculis vidimus testamur*, Y no sólo esto, sino que pongo como testimonio toda mi sacratísima y seráfica orden religiosa con su principal y singular jefe y pastor, el Reverendísimo Monseñor Padre M. FRANCESCO SANSONE DA

BRESCIA, dignísimo general de aquella orden, en nuestro capítulo general del presente año celebrado aquí, en su ínclita ciudad de Milán, al cual concurrió grandísimo número de famosísimos y celebérrimos doctores y bachilleres en sagrada teología y otras ciencias, de lodo el mundo y de cuantas naciones hay bajo el cielo. En él se llevaron a cabo, todos los días, asiduos debates para catedráticos y para el público, siempre con presencia de innúmero gentío, y también condescendió en asistir a ellos Vuestra Ducal Alteza, deferente para con sus siervos, junto con las reverendísimas señorías de su cuñado Monseñor HIPPOLITO TITULI y del diácono de Santa Lucia in Silice, el Cardenal Estense, y muchos otros acompañantes de su honorabilísima magistratura. No hablo de la fertilidad y afluente abundancia en todo prodigada por las manos de su Ducal Alteza para sustento de tan gran multitud, abundancia que proveyó no sólo a los entonces presentes sino también a los venideros, por muchos meses más. Por vuestra salud y felicidad eleva sus ruegos al Altísimo toda la turba menor, juntando las manos, y particularmente yo, indigno y mísero pecador que de continuo me encomiendo a Vuestra Ducal Alteza.

CAPÍTULO LXX

CÓMO ENCONTRAR TODOS LOS CUERPOS, ORDENADAMENTE, SEGÚN ESTÁN DISPUESTOS EN ESTE TRATADO, CONSTRUIDOS EN PERSPECTIVA, Y ADEMÁS SUS FORMAS MATERIALES SEGÚN SU TABLA PARTICULAR, PRESENTADA A LA VISTA DEL PÚBLICO. Puesto que donde no hay orden hay siempre confusión, por eso para mayor inteligencia de éste compendio nuestro, a fin de saber encontrar cada una de las figuras presentadas en perspectiva en este tratado, y también las formas materiales según la correspondiente tabla pública, Vuestra Alteza observará lo siguiente: cuando leáis al principio los capítulos relativos a su origen y formación, atended en aquel lugar del libro al número marcado según ábaco antiguo, a saber, empezando por capítulo primero hasta llegar al cuadragesimoctavo, de este modo: I, N, M, IV, V y así hasta terminar. Este mismo número trataréis justamente de encontrarlo más adelante, en el pasaje de este tratado en que dichos cuerpos se representan por orden, figurando justamente ahí abajo el mismo número, y correspondiendo I a I, II a II, III a III y así todos. Cada figura corresponderá al cuerpo indicado, y estará representada en el plano según perfecta perspectiva, como hace nuestro LIONARDO DA VINCI. Estos mismos números, además, los buscaréis entre las formas materiales de dichos cuerpos, colgados, con su nombre en griego y en latín colocado

en una leyenda sobre cada cuerpo fijado en su cordel, entre dos soportes de ámbar negro y refiriendo también cada uno, según se ha dicho, al número colocado en el lugar donde se trata de aquel tal cuerpo. Vuestra Alteza podrá disponer de ellos en una y otra forma. Esos cuerpos, en vez de ser de vil materia, que yo por mi pobreza me he visto obligado a emplear, deberían estar labrados en precioso metal y finas piedras. Pero Vuestra Alteza tendrá en cuenta el afecto y la intención de su perpetuo siervo.

CAPÍTULO LXXI

DE LO QUE SE ENTIENDE POR LOS SIGUIENTES VOCABLOS USADOS ENTRE LOS MATEMÁTICOS: HIPÓTESIS, HIPOTENUSA, CORAUSTO, CONO PIRAMIDAL, CUERDA PENTAGONAL, PERPENDICULAR, CATETO, DIÁMETRO, PARALELOGRAMO, DIAGONAL, CENTRO, SAGITA.

Hay algunos vocablos, excelso Duque, que los sabios emplean en las disciplinas matemáticas, para inteligencia de sus partes, a fin de que en ninguna haya error, vocablos que, para quien no fuese muy experto en ellas, resultarían estorbosos. Los hemos utilizado a menudo en este compendio nuestro, según habréis comprobado en vuestra lectura. Los adoptamos para no alejarnos de los antiguos, y creo que será útil y oportuno dar aquí sucinta noticia de ellos, empezando por la palabra *hipótesis*.

Por *hipótesis* debe entenderse el presupuesto admitido y concedido entre las partes contrincantes, mediante el cual se quiere llegar a la conclusión, y tal que, si se niega, no se sigue conclusión. Pero no es costumbre admitirla si no es posible.

Por *hipotenusa* se entiende principalmente en todas las figuras rectilíneas la recta que se opone al ángulo mayor formado por los lados. Pero más propiamente ha sido costumbre entender por tal palabra el lado opuesto al ángulo recto en los triángulos rectángulos u ortogonales, que así se llaman en el arte, y que necesariamente son siempre la mitad de la figura

cuadrada, o sea del tetrágono alargado, es decir, de la figura rectangular de cuatro lados más larga que ancha.

Por *corausto* se entiende una línea recta que une las extremidades de dos líneas elevadas hacia arriba. Los coraustos pueden ser en más o menos según el número de las líneas elevadas.

Cono de la pirámide quiere decir el punto más alto de la cima, adonde concurren las líneas que parten de su base.

Por *cuerda pentagónica* o *pentagonal*, vale decir, del ángulo pentagonal, se entiende una recta trazada, en la figura pentagonal, desde cualquiera de sus ángulos al otro opuesto a él, como se ha hecho varias veces.

Perpendicular quiere decir una línea recta elevada o situada sobre otra, a escuadra, es decir, que forme uno o más ángulos rectos a su alrededor, y así también cuando dicha línea, en la forma indicada, estuviere sobre una superficie plana. En los triángulos, comúnmente, se suele hallarla para medirlos, según en dicha obra nuestra dijimos oportunamente.

Cateto significa lo mismo que la perpendicular, y en los triángulos suele llamarse vulgarmente, con término aproximado, sagita del triángulo, y deriva de un vocablo griego.

Por *diámetro* se entiende propiamente en el círculo una línea recta que pasa por su centro y con sus extremos toca por ambas partes la circunferencia, dividiendo el círculo en dos partes iguales. Pero se suele decir también diámetro a propósito de los cuadrados, y por tanto, para que no haya equivocación, se dice diámetro del círculo y diámetro del cuadrado, a fin de diferenciar el uno del otro.

Por *paralelogramo* se entiende una superficie de lados equidistantes. Tales superficies son en rigor las cuadriláteras, es decir, aquellas cuatro especies que anteriormente, en el capítulo sesenta, se indicaron con los nombres de cuadrado, tetrágono

alargado, rombo y romboide (y con otro nombre el *elmuaym* y similar al *elmuaym*). Aunque toda figura de lados pares tiene lados opuestos equidistantes, como el hexágono, octágono, decágono, dodecágono, etc., sin embargo hay que entender aquí la figura de cuatro lados.

Diagonal significa principalmente una línea recta tirada de un ángulo a otro opuesto en el tetrágono alargado (pero no en el cuadrado) la cual lo divide en dos partes iguales. Además se acostumbra llamarla así en el rombo y en el romboide.

Centro se llama propiamente, en el círculo, aquel punto medio en el cual se afirma el pie inmóvil del compás para que, haciendo girar el otro pie, resulte formado el círculo con la línea llamada circunferencia, o bien periferia. Todas las líneas trazadas desde ese punto a la circunferencia son iguales entre sí. Sin embargo, se usa también llamar centro, en las otras figuras rectilíneas, el punto medio de sus superficies, como en los triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos y demás figuras equiláteras y equiángulas. Las rectas trazadas desde cada uno de sus ángulos a dicho punto serán también iguales entre sí.

Sagita se llama aquella línea recta que, desde el punto medio del arco de alguna porción del círculo, se dirige y cae a escuadra en el medio de su cuerda, y llámase sagita con respecto a la parte de la circunferencia que se llama arco, a semejanza del arco material, para el cual se emplean también esos tres nombres, cuerda, arco y sagita.

Aunque se usan muchísimos otros vocablos, de los cuales hemos tratado ampliamente en nuestra gran obra, no me preocupo por citarlos aquí, pues sólo he creído oportuno ofrecer los que sean necesarios a la inteligencia del presente compendio, para Vuestra Alteza. Si este compendio, con tener tantas hojas, no está del todo concluido, no por eso sufren menoscabo la materia y la altura de las especulaciones tratadas en él. Y en

verdad, excelso Duque, no miento a Vuestra Alteza si digo que la especulación de los matemáticos no puede virtualmente llegar más alto, pues a veces las cantidades resultan menores. En este campo nuestro filósofo megarense puso fin y remate a todo su volumen de aritmética, geometría, proporciones y proporcionalidades, dividiéndolo en quince libros, como aparece claro al inteligente lector. Por lo tanto, no poca gracia y dignidad proporcionará a vuestra dignísima biblioteca, como antes en nuestra epístola dijimos, por ser el solo y único compuesto sobre tal orden de cosas y por nadie conocido hasta ahora en todo el universo, salvo por Vuestra Excelencia. Aquí, en vuestra grande e ínclita ciudad de Milán, no con mediocres afanes y con largas vigilias, a la sombra de Vuestra Alteza y de su querido —como hijo— GALEAZZO SFORZA, Señor de Aragonia, mi inmerecido particular y singular protector, a nadie inferior en las armas y amantísimo de nuestras disciplinas, máxime en el día de su asidua lección, gustando su útilísimo y suave fruto. Para conclusión de ese tratado, declaro el humilde acatamiento y reverencia de este perpetuo siervo de Vuestra Alteza que infinitamente y en todas formas se encomienda a vos.

Orne herum atque herum ad vota felicissime valet.

FINIS

A 14 de diciembre y en Milán, en nuestro almo convento,

MCCCCXCVII.

En el séptimo año del pontificado

de Alejandro VI.

[PARTE SEGUNDA][73]

[EPÍSTOLA]

A SUS MUY QUERIDOS DISCÍPULOS Y ALUMNOS CESARE DAL SASSO, CERA DEL CERA, RAINER FRANCESCO DE PIPPO, BERNARDINO Y MARSILIO DA MONTE, HIERONIMO DEL SECCIARINO, Y COMPAÑEROS DE BORGO SAN SEPOLCRO, DIGNOS CANTEROS, SAGACÍSIMOS CULTORES DE LA ESCULTURA Y ARQUITECTURA, FRAY LUCA PACIUOLO, SU CONTERRÁNEO, DE LA ORDEN DE LOS MENORES Y PROFESOR DE LA SAGRADA TEOLOGÍA, *S. P. D.*[74] ❦ Requerido varias veces por vosotros para que, además de la práctica que os di sobre aritmética y geometría, al mismo tiempo quisiese también daros con ella alguna norma y procedimiento para poder conseguir lo que anheláis en la arquitectura, aunque ocupadísimo en la preparación de nuestras obras sobre disciplinas matemáticas que estoy por imprimir con todo empeño, para la común utilidad de los estudiosos actuales y futuros, no puedo dejar de satisfacer, si no en todo al menos en parte, vuestro humano ruego, máxime lo que crea necesario para vuestro propósito. Por eso comprendo sin duda alguna que, así como en los otros asuntos dignos de estudio siempre os habéis deleitado aplicándoos con toda dedicación, de la misma manera en esta materia os dispondréis con más ardiente interés. Así es que rehusando toda otra empresa me he puesto con todo empeño a querer, como he

dicho, satisfaceros al menos en parte. No pienso al presente tratar en forma completa de tal arte, o mejor dicho ciencia, pues me reservo hacerlo, con la ayuda del Altísimo, con más tiempo y comodidad, como conviene a tales disciplinas por ser éstas materias de alto coturno. Por tanto, os ruego que en el ínterin, en esta plática, no os resulte cansada la espera, pues, si no surgen inconvenientes, espero satisfaceros plenamente, y prometo daros plena noticia sobre perspectiva mediante las enseñanzas de nuestro conterráneo y contemporáneo maestro PIERO DELLA FRANCESCA, monarca de tal especialidad en nuestros tiempos, cuya obra ya resumí en un muy digno compendio y aprendí muy bien, y de su querido —como hermano— maestro LORENZO CANOZZO DA LENDENARA, el que fue también en dicha especialidad, en sus tiempos, grandísimo maestro, según demuestran evidentemente sus famosas obras de taracea en el digno coro del Santo, en Padua, y en su sacristía, y en Venecia, en Ca Grande, como también las de pintura en los mismos lugares y en otros; y también, al presente, del querido compadre GIOVANMARCOMIO, hijo de aquél, quien ha salido del todo a su padre, como manifiestan sus obras en Rovigo y el digno coro en nuestro convento en Venecia y, en la Mirándola, la obra arquitectónica representada por la digna fortaleza, muy bien concebida, y la constante obra realizada en la admirable máquina de tornillo[75] [utilizada] para dragar los canales en Venecia. De esta manera cada uno de vosotros quedará del todo satisfecho, aunque al presente estéis bastante bien preparados.

Bene valete y a todos vosotros me recomiendo.

En Venecia, 1.º de mayo de 1509.

[PROEMIO]

Siguiendo vuestro deseo esbozaré el plan de lo que sigue. En primer término dividiremos la arquitectura en tres partes principales, dos relativas a los lugares públicos, correspondiendo una a los templos sagrados, otra a los lugares dedicados a la salvación y defensa de pequeñas y grandes repúblicas, y la tercera a aquellos lugares de los domicilios privados necesarios para la propia comodidad y que nos han de amparar de las cosas contrarias y nocivas para nuestros cuerpos. En efecto, la arquitectura extiende su dominio en estos distintos campos y alrededor de ellos.

Si quisiéramos entrar a tratar de ellos, queridos míos, sería muy largo el camino; por eso, según hemos dicho, me lo reservo para más adelante. En efecto, con respecto a los templos nunca podría hablarse tanto como exige su sacratísimo culto y tan cabalmente como habla nuestro VITRUVIO. De la otra parte de la arquitectura destinada a la defensa habría que hablar no menos, como que, en cierta manera, las máquinas y dispositivos militares son infinitos, máxime con los nuevos sistemas de artillería e instrumentos bélicos nunca excogitados por los antiguos, que nuestros esforzados burguenses a pie y a caballo, siempre listos para cualquier acción, emplearon haciendo retumbar la tierra.

Así ANTONELLO, quien con la ayuda de los venecianos y junto con el Duque de Urbino FEDERIGO y el Conde CARLO DA

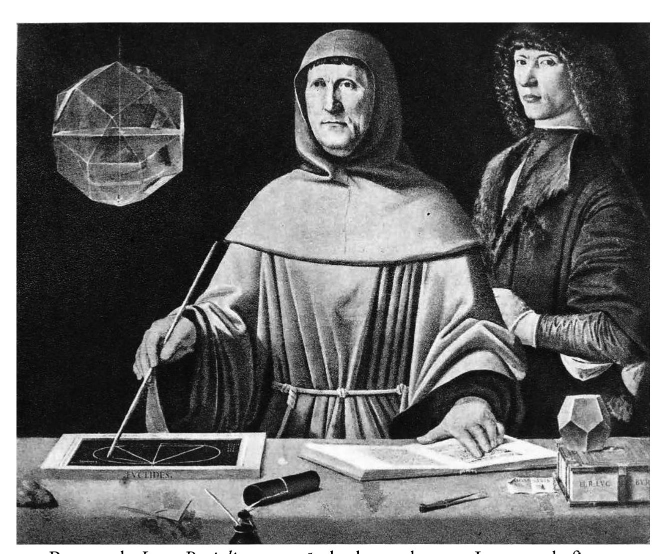
MONTONE repuso en Faenza al Señor GALEOTTO y después de la empresa, aquejado de grave fiebre, volviendo a su casa en Urbino, terminó su vida. Estaba junto a él el reverendo padre M. ZINIPERO y Fray AMBROGIO, mis hermanos carnales, de la misma orden seráfica. Aquél, en el tiempo del rey FERNANDO, en su reino, en la empresa de los ANJOU y los de ARAGÓN, portándose virilmente fue hecho, por aquél, Señor de castillos, con sus descendientes. Luego fue llevado a las regiones de Lombardía por el Duque FRANCESCO [SFORZA] de Milán, donde portándose magnánimamente, fue bien remunerado por él de él nació ALEJANDRO, digno condotiero del rey, de los florentinos y demás potentados. Este ANTONELLO construyó para nuestro convento, *perpetuis temporibus*, la digna capilla de San Francisco con dignísima dote, que sus sucesores han ampliado de continuo. Lo mismo digo de BENEDETTO, llamado BAIARDO, mi estrecho pariente, discípulo de BALDACCIO D'ANGHIARI, famosísimo, varias veces general, capitán de infantes, antes del rey ALFONSO, durante su reinado, luego de la Santa Iglesia, en tiempo de NICOLA, luego de los florentinos, en la empresa para expugnar Volterra, luego de los venecianos, dos veces, y la última vez fue Capitán de todo el Levante. En camino a la empresa de Scutari, sorprendido por el flujo, él y el sobrino suyo —y mío— FRANCESCO PACIUOLO, en Ragusa, el último día, dejaron la vida. ANTONELLO nombró entre nuestros burguenses muchos valientes condestables, como GNAGNI DELLA PIETRA, quien en la defensa de Scutari contra los turcos, herido en el brazo y envenenado, murió rápidamente.

Éste fue el que, con su ronca, de un golpe echó al suelo la cabeza de TARIPAVER junto a la de muchos secuaces suyos, cuando aquél llegó a Spalato para matar a traición al Conde, gentilhombre veneciano, y despojar de tierras a la Señoría de Venecia. Con respecto a este personaje no habría suficiente papel para decir con cuánto valor obró siempre. En tiempo del

Conde IACOMO en Romana, varias veces hizo la prueba de correr a pie una milla larga a la par de bárbaros y veloces jinetes, tocando el estribo sólo con un dedo. De él quedó un lindo niño, el hoy digno condestable FRANCESCHINO, su primogénito, a quien la Señoría de Venecia con continuo y diligente cuidado educó, encomendándole al presente la libre guardia de la plaza de Trieste. Dejó también otros famosos descendientes educados de la misma manera, como Messer FRANCO DAL BORGO y TODARO, dignos asalariados de los venecianos, y MARTINELLO DA LUCA, al presente encargado de la guardia de Cipre. No menos habría que decir sobre su hermano carnal ANDREA, quien murió de fiebres al servicio de nuestros señores florentinos, y fue antes capitán de infantería de los señores venecianos contra los tudescos, en la empresa de Trento, donde fue injustamente acusado. La Señoría Ilustrísima, después de un año y cinco días, poniendo fin a su castigo, habiendo reconocido su inocencia y que todo era por envidia, lo dejó en libertad y acreció su grandísimo afecto para con él, y a su hijo MATEO lo protegió siempre debidamente, siendo al presente destinado a la guardia de Asolo en la región de Brescia con digna compañía. De la misma manera al otro hijo suyo, GIOVANNI, lo dejó a la guardia de Gorizia, en Friuli. Lo mismo dígase del otro digno conciudadano nuestro, VICO, esforzado armígero, amado de todos, y de apellido DOLCI, y de muchos otros, que siempre se distinguieron por el viril manejo de las armas y que de esta vida pasaron a la otra con debido honor. Volviendo a nuestro BENEDETTO BAIARDO, también fueron hechos por él dignos condestables nuestros burguenses CINCIO DA SCURCOLA con sus tres hermanos, BUCIUOLO DE LAPEGIO y CHIAPINO, su hermano, quien murió en Lepanto a sueldo de los venecianos; MANCINO y LONGO DE' FEDELI, dignos condestables, y BARTOLINO y compañeros de aventuras de BARTOLINO y otros muchos nombrados por él; y lo mismo hizo en favor de generosos,

esforzados y grandes caballeros de otros estados, como MELO DA CORTONA, que fue muerto en Bagnacavallo al servicio de los venecianos y sepultado en Ravena; L'ALBANOSETTO, GIOVANNI GRECO DALLA GUANCIA, a quien al presente los señores venecianos encargaron la guardia de Rímini con digna escolta de caballería ligera e infantes, y que fue capitán de aquel lugar. Del mencionado BENEDETTO vive un hijo llamado BALDANZONIO, dedicado a la vida civil con su digna madre ELIZABETTA. De los vivos, al presente, figuran también nuestros egregios militares empleados en toda clase de tareas al servicio de diversos potentados, como el magnífico caballero *espuela de oro*[76] Messer CRIACO PALAMIDES, señor que fue distinguido por mi magnánimo Duque de Urbino Guido V, quien junto con la insignia militar le donó el castillo y fortaleza llamada "La Mettila", *pro suis benemeritis*. Éste, portándose con todo valor en tierras del reino de la Iglesia y alrededor de Pisa y en Pistoya, bregando por los Florentinos en favor de las facciones de los "panciatichi" y cancilleres, fue siempre honrado por aquel dominio. Sus primeras acciones, en efecto, fueron bajo el ilustrísimo señor de Rímini, el magnífico RUBERTO MALATESTA; siendo capitán de los señores venecianos, mandado por ellos contra el DUQUE DE CALABRIA en defensa de la Santa Iglesia y habiéndola libertado, pronto murió, siendo sepultado con honores en San Pietro en Roma con los dos estandartes públicos de San Marcos y de la Santa Iglesia. Este Messer CRIACO fue no poca honra para nuestra tierra de Borgo San Sepolcro. Otros fueron MARCO, armígero *espuela de oro*, y Messer MASTINO CATANI, quien en la caballería, siguiendo la carrera de las armas, dio gran renombre a su digna casa, a la cual pertenecieron varios caballeros *espuela de oro*, como padre ZENO y AVOLO, el magnífico caballero. Además, está el Messer MARTINO DE' CITTADINI, que fue también honrado por la excelsa casa feltrense y por mi excelente y magnánimo Duque y nombrado,

por sus méritos, caballero y señor del castillo llamado "La Massetta".



Retrato de *Luca Pacioli* acompañado de un alumno. La segunda figura sería, según parece, un autorretrato del autor del cuadro. Óleo de Jacopo de' Barbari.

Por eso recibió siempre grandes atenciones de nuestros señores florentinos, por su ingenio, ánimo y gallardía. El magnífico Messer Gnagni Rigi, otro caballero *espuela de oro*, ejercitando las armas a pie y a caballo, siempre obtuvo recompensas y grandes honores para sí, para los suyos y para toda su tierra, y nunca fue vencido. Ora con dicho Duque, ora con nuestros señores florentinos, ora con el ilustre señor de Pésaro, y al presente con los señores venecianos en la guardia de Cattaro, con digna escolta, capitán representante de nuestro Messer Mario de' Bernardi, y con sus cuatro dignos hijos, Cristoforo, Piero, Francesco y Troilo, todos dignos hombres de armas, Messer Gnagni, siempre digno condotiero, con diversos potentados feltrenses y con nuestros señores florentinos, en su vejez proporcionó honor a su casa y a su tierra. Lo mismo hizo su querido e íntimo consocio Marco Dagnilo.

Al presente hay también, un GNAGNI, de apellido PICONE, con sus dos queridos hijos ANDREA y BARTOLOMEO, quienes al servicio de los venecianos se comportaron dignamente, por lo cual lograron gran reputación entre ellos, habiendo tenido una egregia actuación en la empresa contra los tudescos junto al ilustre Duque y al señor BARTOLOMEO DALVIANO y a los magníficos proveedores de campo, Messer GIORGIO CORNARO y Messer ANDREA GRITTI, quienes dieron cuenta de sus buenas aptitudes al senado. Por su conducta fue bien remunerado y enviado como capitán a la guardia de Fiume junto con dichos sus hijos y con GIULIANO, sobrino carnal. Asimismo, PAOLO DE TANO [luchando] por nuestros señores florentinos junto con los otros da renombre a su casa, a los suyos y a toda su tierra por sus egregias y célebres hazañas en Liorna y otros lugares de dicho dominio. Dejo a un lado al esforzado condestable, también conterráneo nuestro, BRONCHINO, que fue muerto en la empresa de Citerna, por los VITELLI; y dejo a un lado también su Goro en las facciones de Pistoya y así también su VITELLO, quien, luchando egregiamente por nuestros señores florentinos, en Pisa bajo lanzas y roncas dejó la vida. PAOLO DAPIEL, también en Scutari luchando por los venecianos con el antedicho GNAGNI DAL BORGO, y en Castellina por nuestros señores florentinos, en la guerra del DUQUE DE CALABRIA siempre con dignísima defensa salvó el lugar. En sus tiempos, no había otro hombre de infantería similar a él en cuanto a defensa. Dejo a un lado, además —y tenía que haber hablado de ellos antes— a PAPIA y PAPO DE PANDOLFO, su sobrino, a quienes entre infantes —siendo el padre digno condestable, y él, jefe de bandera— jamás hubo necesidad de acicatearlos junto con los perezosos y miedosos. Ahora, *breviter*, dilectísimos míos, con respecto a la parte exquisita de la arquitectura para defensa pública, como muros y antemurales, merlones, manteletes, torres y revellines, bastiones y otros reparos, torreones,

casamatas, etc., con todos los ya citados usados y desusados, a veces, como sucede hablando, los he puesto ora con una, ora con otra forma, apoyándome mucho en la experiencia visual y manual, arguyendo ora de un modo, ora de otro —oyéndolos y teniendo en cuenta sus razones— no sólo, con el ilustre señor Messer GIOVANNIACOMO TRIVULZI y con el entonces digno orador del Dominio Florentino PIER VETTORI, estando presente Pontano en el palacio del CONDE DE SARNO en Nápoles, sino también con el magnífico y digno condotiero señor CAMILLO VITELLI de la Cittá di Castello a quien yo leí por tres años el sublime volumen de nuestro EUCLIDES; y en Milano con mi singular protector en aquel tiempo, Messer GALEAZZO SAN SEVERINO, y varias veces con el excelentísimo Duque LUDOVICO MARIA SFORZA. Encontramos, *finaliter*, que esta parte de la defensa es muy profunda para nuestros tiempos, a causa de las nuevas máquinas de artillería que no existían en tiempo de nuestro VITRUVIO. Por esto dejaremos esta parte, por ahora, reservándola para tratarla con mayor extensión.

Dejaremos para una próxima oportunidad, según sea necesario, la tercera parte de dicha arquitectura, como la arquitectura de palacios y otras edificaciones por dentro y por fuera, con todas sus partes, como cámaras, antecámaras, salas, pórticos, estudios, cocinas, establos, teatros y anfiteatros, baños, letrinas, pozos, fuentes, canales, hornos, claustros, escaleras, ventanas, troneras, vías, calles, plazas de mercados y otros lugares de paseo, cubiertos y descubiertos, con toda su debida simetría[77] de proporciones y proporcionalidades en relación a todo el cuerpo del edificio y a sus partes y elementos interiores y exteriores, de los que habla plenamente nuestro VITRUVIO y también FRONTINO a propósito de los acueductos, como figura en los antiguos arcos romanos, hacia Marino, en las termas de Diocleciano, y en los otros baños de Pozzuoli y Viterbo, con respecto a los cuales se encuentra no poca simetría de

proporciones y proporcionalidades. Por ahora hablaremos sólo de otra parte muy necesaria a las tres que ya hemos mencionado y que, no me cabe la menor duda, os será proficua, pues al presente comprendo que vosotros estáis del todo preparados para ella, al imitar las obras de escultura de FIDIAS y PRAXITELES, cuyas obras en el Monte Cavallo en Roma perpetúan su preclara celebridad. En efecto, ninguna parte de dicha arquitectura puede estar del todo bien adornada si no lo está por piedras muy bien labradas, ya sean de mármol, pórfido, serpentina u otra suerte distinta de piedra, como también de columnas, cornisas, frontispicios y otros ornamentos tanto para la parte defensiva y pública cuanto para la parte de la arquitectura sagrada. Ahora bien, como esta parte de la arquitectura adorna los edificios tanto más cuanto que ella está conformada con más apropiado cuidado de proporciones y proporcionalidades, cosas que son sumamente necesarias a las otras, puesto que en ellas os ejercitáis, y aunque nuestro VITRUVIO no habla de ella muy explícitamente, presuponiéndola del todo conocida, aquí me esforzaré con él en exponerla clara y abiertamente como conviene a un buen cantero con algún conocimiento de dibujo, y de regla y compás, instrumentos sin los cuales no se podría lograr el fin perseguido.

Dividiremos nuestro discurso en tres partes sucintas conforme al número de los tres ejemplos puestos al principio de esta obra, llamada *La Divina Proporción*. Es decir, hablaremos antes de la proporción humana referente a su cuerpo y miembros, pues toda medida con sus denominaciones se deriva del cuerpo humano y en él están señaladas por el dedo del Altísimo toda suerte de proporciones y proporcionalidades mediante los intrínsecos secretos de la naturaleza. Por eso todas nuestras medidas e instrumentos destinados a medidas, en obras públicas y privadas, como se ha dicho, reciben su nombre del cuerpo humano: una de ellas se denomina braza, otra paso, otra

pie, palmo, cúbito, dedo, cabeza, etc. Y de la misma manera, como dice nuestro VITRUVIO, tenemos que dar proporción a todo edificio a semejanza de todo el cuerpo que está bien proporcionado con respecto a sus miembros. Por esto antes diremos de esa medida humana con las proporciones respecto de sus miembros, según la cual tendréis que guiaros en vuestra obra de cantería, máxime en frontispicios y otras dignas fachadas de templos, puertas y palacios, los que siempre se acostumbró adornar con columnas, cornisas, arquitrabes, como explica ampliamente nuestro VITRUVIO. Pero como los términos que él emplea fueron mal entendidos por muchos en nuestros tiempos, por ser, en verdad, algo extraños según él mismo afirma, pues fueron impuestos por las exigencias del arte, por eso en su libro dice así: "Id autem in architecturae conscriptionibus non potest fieri, quod vocabula ex artis propria necessitate concepta inconsueto sermone adiiciunt sensibus obscuritatem. Cum ea ergo non sint aperta nec pateant in eorum consuetudine nomina", etc.

Eso está en el proemio de su quinto libro de la *Arquitectura*, donde concluye que cuando los historiógrafos escriben su historia tienen sus vocablos propios, los poetas sus pies y medidas con sus acentos, etc. Pero no así sucede a los arquitectos, que necesitan usar por fuerza vocablos extraños que originan en el intelecto cierta oscuridad. Por esto me esforzaré en explicar su sentido, lo necesario para lo que se refiere a nuestro propósito. Antes diremos de las columnas redondas, cómo tenéis que disponerlas debidamente con vuestros escoplos, para fortalecer y sustentar el edificio, y también para adornarlo. Luego diremos del epistilo o bien arquitrabe y de su composición. Cuando hayamos hablado de ellos, los situaremos en la obra de una puerta que será similar a aquella del Templo de Salomón en Jerusalén, aquélla de la predicción del profeta EZEQUIEL, con las otras disposiciones. Luego, vosotros por

vuestra inteligencia podréis hacer de ellas cuantas queráis.

CAPÍTULO I

DE LA MEDIDA Y PROPORCIONES DEL CUERPO HUMANO, SIMULACRO DE LA ARQUITECTURA. DE LA CABEZA Y DE SUS OTROS MIEMBROS. ❧ Tenemos que considerar, como dice PLATÓN, en su *Timeo*, tratando de la naturaleza del universo, que Dios, plasmando al hombre, le puso la cabeza en la cima, a semejanza de las ciudadelas y fortalezas en las ciudades, para que sirviera de guardia a todo el edificio corporal, es decir, todos los otros miembros inferiores. Y armó y proveyó a aquélla de todas las oportunidades necesarias, como se ve con sus siete troneras, es decir, siete agujeros por los cuales el intelecto fuese a la conquista de las cosas exteriores. Éstas son: las dos orejas, los dos ojos, los dos agujeros de la nariz; la séptima es la boca. En efecto, así reza la máxima filosófica: *nihil est in intellectu quin prius sit in sensu*. De ahí que las sensaciones humanas son cinco, es decir: ver, oír, oler, tocar y gustar, y de ahí nace el proverbio que dice: *quando caput dolet cetera membra languent*, a semejanza de dichas fortalezas en las ciudades, cuando están vejadas y molestadas por los enemigos con máquinas militares y artillería: brigolas, trabucos, catapultas, ballestas, bombardas, pasavolantes, escopetas, arcabuces, cañones cortos, basiliscos y otros instrumentos dañinos, toda la ciudad se resiente con gran peligro para su salud. Así sucede al hombre: cuando se le daña y afecta la cabeza, todos los demás miembros sufren. Por eso, la naturaleza,

ministra de la Divinidad, al formar al hombre, dispuso su cabeza con todas las debidas proporciones correspondientes a las demás partes de su cuerpo. Y por esto los antiguos, considerando la debida disposición del cuerpo humano, conformaban todas sus obras, máxime los templos sagrados, de acuerdo con la proporción de dicho cuerpo, pues en aquél encontraban las dos figuras principales sin las cuales no es posible hacer nada, es decir, la circular, la más perfecta y la más capaz de todas las otras *isoperometrarum*, como dice DIONISIO en el *De Sphaeri*. La otra es la figura cuadrada equilátera. Y éstas son originadas por las dos líneas principales, a saber, la curva y la recta. En cuanto a la figura circular, ella se manifiesta si un hombre se tiende supino y abre bien, todo lo posible, las piernas y los brazos. El ombligo será justamente el centro de todo el lugar ocupado, de manera que, si se toma un hilo bastante largo, se afirma un cabo en dicho ombligo y se hace girar alrededor el otro, tendremos justamente que dicho cabo tocará por igual la cima de la cabeza y las puntas de los dedos medios de las manos y las de los dedos gordos de los pies, condiciones que se requieren para la verdadera definición del círculo formulada por nuestro EUCLIDES en el principio[78] de su libro primero. Se tendrá además la figura cuadrada si se extienden de la misma manera los brazos y las piernas y de la extremidad de los dedos gordos de los pies se tiran a las puntas de los dedos medios de las manos líneas rectas de manera que, desde la punta del dedo gordo de uno de los pies a la otra punta del otro pie, dé tanto como de la cima de los dedos medios de las manos a dichas puntas de los dedos gordos de los pies, y además tanto como da tirando una línea de una a otra cima de dichos dedos medios de las manos.

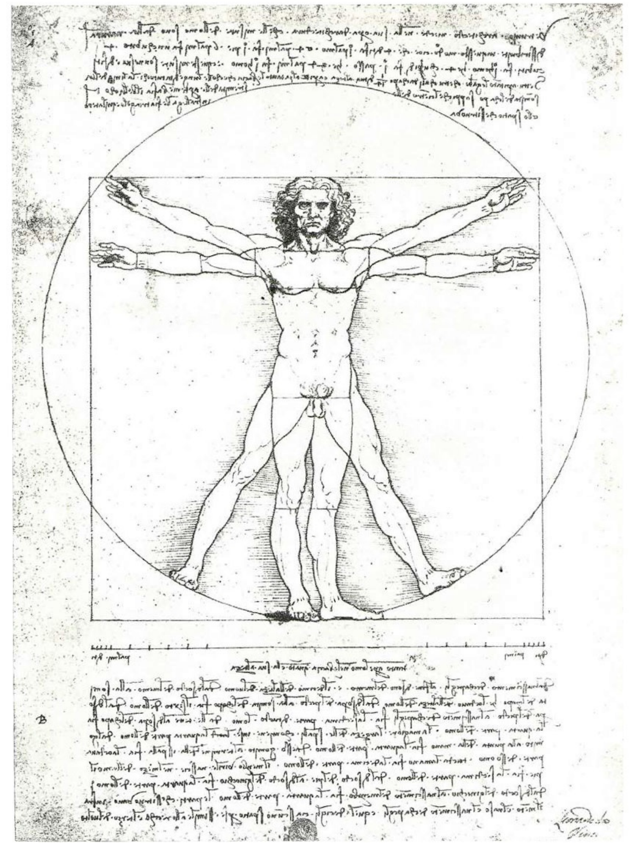
Cuando se abren los brazos bien derechos, dan exactamente la altura o longitud del hombre, si está bien formado y no es monstruoso, pues esto se da siempre por presupuesto, como dice nuestro VITRUVIO. Su nobilísimo miembro exterior, es decir la

cabeza, si bien se mira, se encontrará que está formado sobre la forma de la primera figura rectilínea, es decir, la figura triangular equilátera, llamada *isopleuros*, puesta por nuestro EUCLIDES, al comienzo de su primer libro, como fundamento y principio de todos los demás libros que le siguen, cuando dice: *triangulum equilaterum supra datara lineam rectam collocare*. Esto se ve claramente a simple vista en la presente figura, si se consideran bien los contornos de toda dicha cabeza. Como se ve, el triángulo *amk* está formado por lados iguales. Sobre su lado *mk* está hecho el tetrágono largo *kmsb*, ancho como el cateto *a* que se dirige a la base el cual para no tapar la nariz lo he dejado con una sola letra. Este lado *mk*, que es todo el frente de dicha cabeza, está dividido en tres partes iguales, en el punto *l* y al término de las ventanillas de la nariz, de manera que tanto da *ml* como de *l* a dichas ventanillas, y de dichas ventanillas a plano del mentón. Cada una de estas partes es un tercio de *mk*. Entonces, desde la parte más baja de la frente, la entrada de la nariz, *l*, a la altura de las pestañas, hasta las raíces de los cabellos, *m*, es decir, hasta la cima de la frente, hay un tercio de dicho lado de manera que su frente es alta exactamente la tercera parte de toda la cabeza; asimismo, la nariz es otro tercio, y de dichas ventanillas hasta el plano del mentón *h o k* hay otro tercio. Este último tercio se divide aún en tres partes iguales, de las cuales una va de las ventanillas a la boca, otra de la boca a la entrada del mentón, y la tercera, de dicha entrada al plano del mentón De tal modo, cada una es la novena parte de toda *mk*, es decir, el tercio de un tercio, aunque el mentón se desvía algo del perfil de la cara, *m* como se ve dibujado en dicha figura, cuya cantidad no nos es conocida precisamente, pues la naturaleza la confía sólo al buen gusto y arbitrio del ojo de los pintores egregios. Y ésta es una especie de las proporciones irracionales, las que no se pueden designar con un número.

Lo mismo puede decirse de la distancia de la raíz de los

cabellos al final del ángulo *m*, raíz que también se aparta algo de dicho perfil, según puede verse, pues de otra manera no sería agradable al ojo. La perpendicular a, o cateto, va justamente derecho al centro de la nariz y corta el perfil precisamente en la mitad, en los bien proporcionados y debidamente conformados y no monstruosos.

Estas partes que hemos indicado hasta ahora, en proporción a dicho perfil, vienen a ser todas racionales y conocidas para nosotros. Pero donde interviene la irracionalidad de las proporciones, vale decir que éstas no pueden expresarse de ninguna manera con un número, quedan al digno arbitrio del perspectivo, quien tendrá que determinarlas según su buen gusto, pues el arte imita la naturaleza en lo posible y si el arte hiciera exactamente lo que la naturaleza ha hecho no se llamaría arte sino otra naturaleza *totaliter* semejante a la primera y que vendría a ser una misma. Digo esto para que no vayáis a extrañaros si todo no puede traducirse exactamente por mano del artífice, pues no es posible. De ahí que los sabios digan que las ciencias y disciplinas matemáticas son abstractas y nunca es posible hacerlas visibles *actualiter*. En efecto, la mano jamás puede dar forma al punto, a la línea, a la superficie y a toda otra figura, y aunque nosotros llamamos punto a ese signo que se hace con la punta de la pluma u otra púa, sin embargo, no es aquel punto matemático de la definición que en las primeras palabras de sus *Elementos* da nuestro EUCLIDES cuando dice: *Punctus est cuius pars non est*.



Estudio de proporciones. Dibujo a pluma de Lonardo da Vinci. Real Academia de Venecia.

Y así decimos de todos los demás principios matemáticos y figuras que tienen que entenderse abstraídos de la materia. Por eso, aunque nosotros los llamamos punto, línea, etc., lo hacemos porque no tenemos vocablos más apropiados para expresar sus conceptos. Baste lo que hemos dicho en cuanto a la división proporcional del perfil de la cabeza humana debidamente conformada. Dejamos lo demás al gusto del artífice, como el centro de la ceja y la punta de la nariz. Aunque desde las ventanillas a dicha punta se da comúnmente la novena parte del perfil, sin embargo no puede determinarse con justeza y con proporción conocida para nosotros, tal como dijimos arriba para el mentón.

CAPÍTULO II

DE LA DISTANCIA DEL PERFIL A LA NUCA DE DICHA CABEZA, ES DECIR, AL PUNTO *a*, QUE LLAMAN NUCA, Y DE LAS PARTES QUE SE INTERPONEN EN LA CABEZA, ES DECIR, OJO Y OREJA. Después de haber hablado del perfil y de las divisiones que se requieren para una cabeza humana bien conformada, diremos ahora, a continuación, de las proporciones del ojo y de la oreja. Para que se entienda lo que vamos a decir, antes dividiremos el ancho del propuesto tetrágono, *sk* también en tres partes, tal como lo hicimos para su longitud. Dividido *ms* en tres partes iguales, una será *mo*, otra *oq* y la tercera *qs*. Luego, para mayor facilidad vuestra, cada una de estas terceras partes la dividiremos en dos partes iguales en los puntos *n, p* y *r*; cada una de ella será la sexta parte de todo dicho ancho *ms*; éstas a su vez podremos subdividirlas en otras mitades que serían justamente duodécimas partes del todo, y éstas también en otras dos partes iguales, siendo cada una la vegésimocuarta parte del todo.

Así podríamos seguir cuanto quisiéramos, dividiendo en partes conocidas, según mayor o menor ancho; y cuantas más partes conocidas se hagan, tanto más cómodo resultará al perspectivo, pues mejor podrá aprehender con la vista la cantidad de la cosa que quiere reproducir, es decir, ya sea cabeza o cualquier otra cosa, como animales, árboles, edificios, etc. Por esto los pintores se han construido una especie de cuadro o

tetrágono alargado con hilos de cítara o de seda, o con tendones, tensos, grandes y pequeños, según mejor les parezca, para las obras que han de disponer en tela, tabla o muro.

De tal suerte, poniendo dicho tetrágono sobre su propia forma y afirmándolo bien para que de ningún modo pueda caerse, entre él y la cosa que quiere reproducir, la cual también hará falta que esté bien afirmada, según el sitio en que quiere hacerla, él luego se sienta, se queda de pie, de rodillas, como mejor le parezca estar acomodado, y con su diligente ojo mirando ora aquí, ora allá, aquel objeto, considera los términos de aquellos hilos cómo corresponden en ancho y largo sobre dicho objeto. De esta manera ellos con su estilo lo van marcando sobre una hoja o en otra cosa, reproduciendo la proporción de los cuadritos de dicho tetrágono, según su mayor o menor número y cantidad, y bosquejan la forma de sus figuras, las que luego visten de gracia visual. Este instrumento ellos lo llaman red, tal como se ve aquí en la cabeza, y de ese instrumento no trato aquí de poner otra figura, pues, por lo que hemos dicho, será fácil su comprensión. Ahora bien, volviendo a nuestro asunto de la cabeza, encontrareis que el ojo con las pestañas del párpado inferior y con la ceja comúnmente tiene de altura un sexto del perfil *mk*, que he tratado de no confundir con líneas, pero que vosotros podréis fácilmente medir con el compás. Su ancho es otro tanto.

La oreja, si miráis bien, encontraréis que es alta cuanto la longitud de la nariz, es decir, la tercera parte de dicho perfil, y ancha un sexto del ancho de dicho tetrágono *ms*, y su mayor amplitud está diametralmente entre la nuca y la joroba de la nariz, justamente sobre el cateto *a*, terminando a la altura de la punta de la nariz y del comienzo de la mejilla. El cuello es dos tercios de dicho ancho *ms*, es decir, cuanto *os*, y así corresponde a la punta del pecho y nudo de la garganta. El occipucio o, como lo llamamos nosotros, la *cicotola*, excede dicho ancho, por

detrás, en dos tercios de su sexto, es decir, en un noveno de toda *ms*; el vértice, es decir la cima de la cabeza, excede la raíz de los cabellos en un sexto de dicha *ms*, en altura, es decir hasta el punto *p* que es su punto medio.

Las otras partes, luego, van degradando hacia adelante proporcionalmente a su contorno, de *p* a *n* y *m*, ángulo del tetrágono, y así hacia atrás con respecto a dicho *p*, hacia *q, r* y *s*, con aquella gracia y en la forma que dijimos respecto del mentón y de la raíz de los cabellos, según sus proporciones irracionales, es decir, que no pueden designarse por número alguno, y según sus partes integrales. Entiendo que esto basta en lo que se refiere a toda la cabeza. A continuación hablaremos todos de la debida proporción de dicha cabeza con respecto a todo el cuerpo y a todos sus demás miembros exteriores, a fin de que, conforme a ella, podáis realizar mejor vuestros trabajos.

CAPÍTULO III

DE LA PROPORCIÓN DE TODO EL CUERPO HUMANO PARA QUE ESTÉ BIEN CONFORMADO CON RESPECTO A SU CABEZA Y OTROS MIEMBROS, SEGÚN SU LONGITUD Y SU ANCHURA. Después de referirnos ampliamente a la proporción de la cabeza y de sus partes, de su largo y de su perfil, ahora diremos de la proporción de dicha cabeza con respecto a todo el cuerpo y a los demás miembros exteriores, para que a vuestros trabajos pueda dárseles proporción más fácilmente, máxime en lo que respecta a las columnas para sostén de sus pesos y a la elegancia de su colocación en los edificios, cuando se las sitúa en la forma de que más adelante se os hablará lo suficiente. A este propósito decimos con los antiguos, especialmente con nuestro VITRUVIO, que la longitud total del hombre, es decir, desde la planta de los pies, base de dicha masa corporal, es comúnmente diez veces lo que va desde el mentón a la cima de la frente, es decir, a las raíces de los cabellos. Por tanto, dicha calavera, es decir, el hueso de dicha altura, es la décima parte de la altura del cuerpo hasta la mencionada cima de la frente. Tal altura los pintores y estatuarios antiguos la toman comúnmente como la de una cabeza, en sus obras, como siempre nos ha demostrado la experiencia en Roma a través de las estatuas y otras figuras, y como continuamente nos demuestran los nuestros, con toda exactitud. Tales medidas, a fin de evitar errores, deben

entenderse siempre como las del hueso limpio, sin carne, tanto las de la cabeza como de las otras partes, pues de otra manera las reglas comunes resultarían falsas, ya que algunos hombres son corpulentos y bien rellenos de carnes y otros demacrados y macilentos, según es dado observar. Por eso los antiguos se han atenido al hueso como a algo más firme y menos variable. De esta manera, en general, en el curso de nuestra obra debemos entender por cabeza justamente todo el perfil *mk* a que antes nos hemos referido. Otro tanto corresponde desde la unión de la palma de la mano, es decir, final del cúbito, a su otra extremidad, lo cual da una cabeza, vale decir la décima parte de toda la estatura, conforme se ha dicho. La altura de toda la cabeza, desde el plano del mentón hasta la cima de la cabeza, es decir, al punto *p*, es la octava parte de la altura total, computando la cantidad entre las raíces de los cabellos hasta su vértice supremo. Desde la parte superior del pecho hasta la raíz de los cabellos, es decir, de *g* a *ms*, da un sexto del todo, y de dicha parte superior[79] del pecho hasta el vértice, es decir *p*, da un cuarto de su altura. Su boca, según dijimos arriba, es alta la tercera parte desde el mentón a las ventanillas de la nariz. La nariz es alta otro tanto. El espacio total desde el final de la nariz a la raíz de los cabellos se llama frente y es alto un tercio de todo el perfil. La longitud total del pie, es decir, desde el talón a la punta del dedo gordo, es la sexta parte de todo el cuerpo, es decir, como desde la extremidad superior del pecho hasta el vértice de la cabeza. A su vez todo el pecho es la cuarta parte. Todo esto lo afirma nuestro VITRUVIO al hablar de *sacrarum aedium compositione*, cuando dice así[80]: “corpus enim hominis ita naturam composuit, uti os capitis a mento ad frontem summan et radices imas capilli esset decimae partis, item manus palma ab articulo ad extremum medium digitum tantundem, caput a mento ad summum verticem octavae, cum cervicibus imis, a sumo pectore ad imas radices capillorum sextae,[81] ad

summum verticem quartae autem oris. Ipsius autem oris altidudinis tertia est pars ab imo mento ad imas nares. Nasus ab imis naribus ad finem medium superciliorum tantundem, ab ea fine ad imas radices capilli irons efficitur item tertiae partis. Pes vero altitudinis corporis sextae cubitumque quartae, pectus item quartae. Reliqua quoque membra suos habent commensus proportionis, quibus etiam antiqui pictores et statuarii nobiles usi magnas et infinitas laudes sunt assecuti. Similiter vero sacrarum aedium membra ad universam totius etiam magnitudinis summan ex partibus singulis convenientissimum debent habere commensum reponsum. Item corporis centrum medium natuialiter est umbelicus", etc.

Esto dijimos arriba, y asignamos, como lo hace él en dicha obra, un círculo y un cuadrado al cuerpo humano. Los que dividían dicha altura en diez partes decían que se dividía según el número perfecto, llamando perfecto el número 10, por las razones referidas en nuestra obra grande, en la sección primera del tratado segundo, *quoniam numero denario omnes phylosophi sunt contenti*, es decir del número de los diez predicamentos en que todos concuerdan, y al cual los griegos llaman *theleon*, pues ven que la naturaleza ha hecho en las manos y en los pies diez dedos, y por esto, como dice nuestro VITRUVIO, el divino filósofo PLATÓN tuvo predilección por este número nacido de las cosas singulares que entre los griegos se llaman mónadas, es decir, a la manera nuestra, unidades. Y esto es así, según los que estudian la naturaleza, pero los matemáticos llaman número perfecto primero al senario, en segundo lugar al 28, según dijimos en dicha nuestra obra y conforme a las condiciones que, en la última proposición del noveno libro, nuestro EUCLIDES formula de esta manera: *Cum coaptati fuerint numeri ab unitate continue dupli qui coniuncti faciant numerum primum, extremus eorum in agregatum ex eis ductus producit numerum perfectum*. Luego por esta consideración juntaron el 10 y el 6 que suman

16, es decir el perfecto filosófico [10] y el perfecto matemático, 6. Ellos dan como resultado de tal conjunción un tercer número, es decir, 16, que, como dice VITRUVIO, lo llaman perfectísimo por estar compuesto y formado de los dos antedichos números perfectos. Tal denominación yo no me atrevo a censurarla, pero me parece bien, procediendo matemáticamente, dar de ella otra razón según nuestro entender, es decir que puede llamarse perfectísimo *ratione quadraturae*, pues es el cuadrado del primer cuadrado que es 4, el cual es el primer *censo* si se excluye la reina de todos los números, la unidad. El número 16 es su cuadrado, vale decir que es *censo de censo*. Tal razón, al lado de la que dieron ellos, no es absurda.

Para que dichas partes podáis retenerlas mejor, creí útil poner aquí al lado, en el margen, la línea correspondiente a la debida estatura humana dividida en la forma que adoptan los antiguos y los modernos. Decimos que tal línea es *ab*, y está dividida en diez partes iguales en los puntos *c, d, e, f, g, k, l, m*. Y tomando como referencia la presente podréis en seguida mediante un compás dar a vuestras medidas las proporciones que creáis convenientes, teniendo en cuenta, según hemos insistido, que los huesos deben considerarse descarnados. Y de ahí tendréis el pie, pues la primera altura, como dice VITRUVIO, fue según la huella del pie humano, la cabeza, el cúbito, etc., conforme a las ya nombradas proporciones.

Podréis proponer en vuestras obras otra línea mayor o menor, la cual, dividida debidamente en sus grados, corresponderá a la altura del cuerpo tanto si es gigante como si es enano. Tales grados estarán debidamente reducidos. En la

misma forma se rigen los cosmógrafos en sus mapamundis y en otras cartas de navegación adoptando sus grados a parte, con los que luego dan proporción al mundo entero.

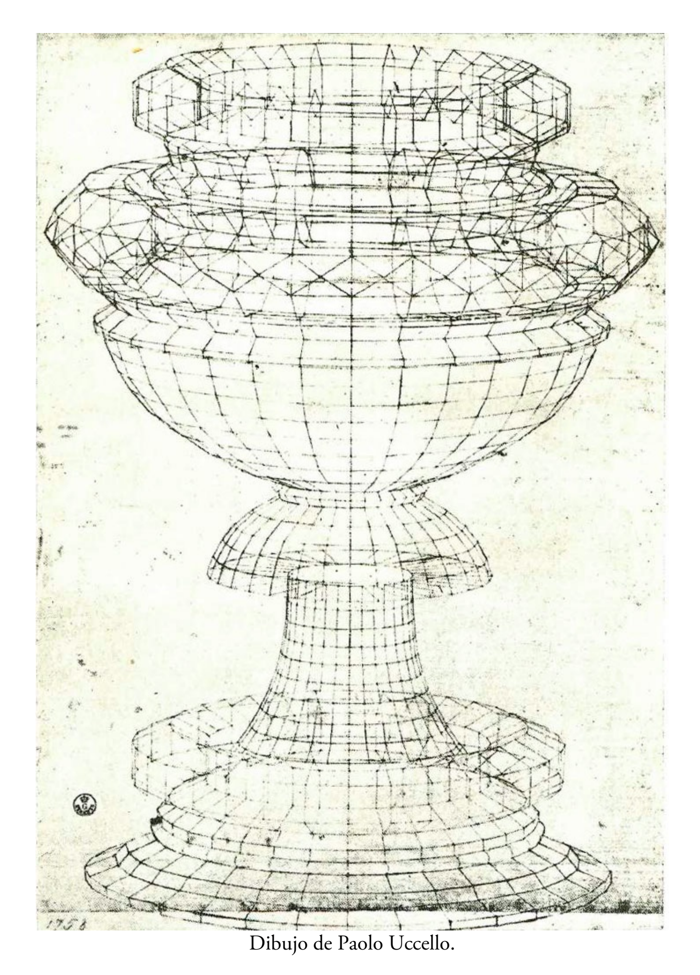
Al respecto habría que hablar sobre muchas otras partes del hombre, pues los sabios lo llaman mundo pequeño. Sin embargo, como aquí no tengo la intención de tratar completamente dicha arquitectura, según dijimos antes, reservándonos, para cuando haya mayor tiempo, tratar de tales partes, creo que para vuestro objeto de la escultura es suficiente lo que dijimos. A continuación entraremos a tratar lo que nos hemos propuesto, es decir, la disposición de las columnas redondas y de sus estilóbatos, bases y capiteles, como os he prometido, en proporción a la estatura humana que antes hemos visto y que veréis en nuestro VITRUVIO. Nosotros en tal circunstancia lo citaremos transcribiendo sus palabras formalmente; de manera que estaréis atentos y las anotaréis con diligencia.

CAPÍTULO IV

DE LAS COLUMNAS REDONDAS CON SUS BASES, CAPITELES Y ESTILÓBATOS. ✠ Como quiero ofreceros brevemente lo que se necesita para las columnas redondas, dividiré esta parte en dos principales; en la primera hablaré de la columna, de su base y de su capitel, y en la segunda de su estilóbato, o basamento o *pilastrello* según algunos. Como arriba, digo que hay que proporcionar cada elemento de cada edificio a todo dicho edificio, así como cada miembro del hombre está conformado en proporción a todo el hombre, lo cual la naturaleza ha puesto como ejemplo frente a nuestra vista. Y a fin de que los vocablos extraños, como los que antes empleó VITRUVIO, no os originen oscuridad en la mente, empleándose a veces el término de columnas jónicas y otras veces de dóricas y corintias, debéis saber que tales nombres fueron dados por los antiguos, según la patria donde fueron encontradas por primera vez dichas columnas, siendo llamadas jónicas por los jonios, corintias por los corintios y dóricas por los dorios. A veces el vocablo se deriva del nombre del primer descubridor.

Ahora bien, esto no debe preocuparnos, pues VITRUVIO lo aclara plenamente; por esto, aquí, no trato de extenderme demasiado. Debéis pensar que es como en nuestra religión cristiana: nosotros tenemos diversos santos y santas, y a cada uno le atribuimos sus signos e instrumentos según los cuales ellos han militado a favor de la fe. Así, atribuimos a SAN JORGE

la lanza y la coraza, el yelmo, la espada y el caballo con toda la armadura; atribuciones similares hacemos a SAN MAURICIO, a SAN EUSTAQUIO, a los Macabeos, etc. A SANTA CATALINA se le atribuye la rueda porque fue coronada con ella por su fe, a SANTA BÁRBARA la torre donde fue encarcelada. Y así, para todos los santos y santas la iglesia permite que en memoria de ellos ante nuestros ojos y para exaltación de la Santa Fe, tenemos que hacer lo mismo sin preocuparnos por nada de los tiranos, *quoniam verbera carnificum non timerunt sancti dei*. Así justamente, los pueblos antiguos, de acuerdo con sus errados ritos, hacían para sus ídolos y dioses, ya en una forma, ya en otra, conforme a las circunstancias, algún ornamento con trofeos, templos y columnas, llamándolas y bautizándolas según sus nombres o patrias donde tuvieron su origen. Así, se dice en las historias de los romanos que FABIO derivó su nombre de las habas [*a fabis*], mientras otros dicen que las habas derivaron su nombre de FABIO y así se lee que APIO derivó su nombre del apio, que se come, mientras que otros sostienen que este fruto, el apio, deriva su nombre de APIO, que fue el primero en traerlo a aquellas regiones. Así sucede con respecto a tales nombres. Las obras de que hablábamos se hacían unas más adornadas que otras, según la dignidad de aquel tal o aquella tal que con todo ahínco había obrado, como HÉRCULES, MARTE, JÚPITER, etc., DIANA, MINERVA, CERES, etc., de acuerdo con lo que dice extensamente nuestro VITRUVIO respecto de todos ellos.



Dibujo de Paolo Uccello.

Ahora bien, volviendo a nuestro asunto, los antiguos acostumbraban dividir en ocho partes iguales la altura de la columna redonda que querían hacer incluyendo en tal altura su capitel; luego esta misma altura la dividían además en diez partes iguales y restaban una de estas partes a un octavo y les quedaba exactamente un cuadragésimo de toda dicha altura, es decir, de cuarenta partes, una. Dicha cuadragésima parte la adoptaban para el ábaco de su capitel, como habréis notado en la figura puesta al principio de este libro. Tal altura del ábaco se señala con *ln*, o bien *mo*, que a veces los modernos llaman *cimacio*. Con el décimo de la altura hacían la campana o

tambor, es decir, caulículo, que llega hasta la gola o parte estrecha de la columna superior; es decir, *lg o mh*. Toda esta parte se llama capitel, con su ábaco en la cima de dicha campana, que allí se llama voluta, la cual corresponde a cuatro ángulos de dicho capitel, como se ve en la punta *l* y en la punta *m*. Desde un cuerno o ángulo del ábaco, o cimacio, hasta el otro se llama *tetrante*, es decir, aquel espacio que media entre uno y otro ángulo, es decir, *no*, y en cada ábaco hay cuatro tetrantes. En el medio de dicho tetrante, se acostumbra hacer como ornamento un florón o rosetón u otra hoja, es decir, una por tetrante, y se llama ojo del capitel. Tales tetrantes se forman de esta manera: se toma el diámetro de la parte estrecha de la columna, por debajo, es decir de aquella gola que descansa sobre la base de abajo, y luego se le duplica tomándolo como diagonal de un cuadrado colocado exactamente en un círculo. Tal cuadrado será justamente el ábaco de dicho capitel. Su tetrante se hace cavado o redondeado hacia el centro de dicho cuadrado o de ese círculo, encorvándolo hasta que de un noveno del costado de dicho cuadrado, es decir, hasta el sitio de su ojo frontal. Dicho ojo se adorna más o menos, según quien trabaja y quien ordena el gasto, con uno o dos ábacos sobrepuestos, como mejor le agrade, según su criterio, guardando las debidas proporciones de su graduación, las cuales se presupone que se observan en toda disposición, degradándolas, es decir, reduciéndolas de mayor a menor o aumentándolas de menor a mayor, tal como en las disposiciones de todos los modelos que se hacen antes y según los cuales es necesario que el arquitecto sepa aplicar en la construcción todo lo que está comprendido en ella. Baste esto en lo que se refiere al capitel de la columna corintia.

CAPÍTULO V

DE LA LONGITUD Y GROSOR DE DICHA COLUMNA.

Dichas columnas redondas se hacen *ad libitum* y su altura se divide en seis partes iguales y a veces en ocho y en siete, como podréis comprender más adelante. Se toma una de estas partes como diámetro de su parte estrecha inferior, es decir, *ef*, que debe ser tanto mayor con respecto a la superior cuanto sobresale del troquilo en la superior, es decir que la parte estrecha de abajo sin su troquilo debe ser como la de arriba con dicho troquilo, para que pueda aguantar el peso. De dicha parte estrecha hasta la tercera parte de la altura de la columna se va aumentando a semejanza del cuerpo humano y, por otro tercio, se mantiene dicho grosor; luego, el otro tercio hasta la cima va degradándose y termina en la parte estrecha superior *kp*. Esa última parte de arriba, en el medio de la parte estrecha, los antiguos la llaman *scapo* y a veces *trochilo* y la de arriba entre éste y el capitel, se llama *toro* superior de la columna; su base debe ser alta la mitad del diámetro de su troquilo inferior, es decir, de *ef*, y tal base se compone de mayor número de molduras que la primera base *ab*. Los antiguos la llaman *plinto* y los nuestros *latastro*. Éste tiene que ser ancho un grosor y medio de la columna, incluyendo todo el saliente, y debe ser alto un sexto del grosor. Lo que está inmediatamente encima, es decir *cd*, se llama *toro* inferior de la base o *bastone*, según algunos; la otra parte angosta que sigue se llama *quadra*[82] y la otra parte

cóncava entre los dos cuadrados los nuestros la llaman *scotica, orbicoli o astragali*. Y sobre su cuadrado descansa el toro superior de la base, es decir, *ef*; de manera que dicha base[83] está hecha de un plinto, dos toros, dos cuadrados y una escocia u *orbicolo* o astrágalo. Todas estas partes en conjunto se llaman base de la columna, de la cual, exceptuando el plinto, lo que resta es un tercio del grosor de dicha columna, de la cual dicho plinto es la sexta parte, según dijimos antes. Tales partes o miembros podrán siempre proporcionarse a todas las demás con su propia simetría, conforme a lo que antes se dijo del cuerpo del hombre. Dichas partes podréis conocerlas por medio de los números.

Habrá también algunas irracionales que no pueden darse ni señalarse con números ni quebrados, como la del diámetro del cuadrado en proporción a su lado. Nuestro VITRUVIO tal composición la llama *spira* y nosotros *base*. Sacando de esta base, o *spira*, el plinto o *latastro*, toda la parte superior se divide en cuatro partes iguales; con una se forma el toro superior, y las otras tres se dividen en dos partes iguales, siendo una el toro inferior, *cd*, y la otra el astrágalo *f*, llamada por los griegos, con sus cuadrados, *trochilo*. Sin embargo, a veces se llama también *trochilo* la última de las dos partes estrechas, inferior y superior, de la columna, es decir *kp*. Aquí pondremos fin a lo que se refiere a dicha columna redonda, siendo suficiente para vosotros. A continuación hablaremos de cómo debe hacerse su basamento o estilóbato.

CAPÍTULO VI

CÓMO SE CONSTRUYE EL ESTILÓBATO, O *PILASTRO*, O BASAMENTO. ☙ El estilóbato sirve de sustento a la columna; nosotros lo llamamos *pilastrello* o *basamento* de la columna, como veis en la figura cuadrilátera *cdef*, que tiene además su base *abcd* y su capitel o cimacio[84] *efmn*, hechos con el adorno de sus partes superpuestas: plinto, toros, astrágalos, cuadrados, *ad libitum*. Tal estilóbato, empero, está limitado en ancho, exactamente como la longitud del plinto de la base de la columna que le está superpuesta, como podéis ver en el caso del plinto de la columna truncada *hg*, igual, por tanto, al ancho del estilóbato *ef* y *cd*, a nivel, pues de otra manera, al ser oblicuo, no soportaría el peso de arriba. Podéis ver que toda la base de la columna *hgkl* descansa sobre él, ofreciendo un aspecto de gran elegancia. Por tanto, el orden de dichas partes, ya sea cuadrados o ya astrágalos, es que sus salientes sobresalgan siempre de un lado y de otro tanto cuanto son anchos o altos, para que dichos salientes, derechos e izquierdos, correspondan a un cuadrado, así fueran diez mil, en la base y en el capitel. Esto, como más adelante comprenderéis, debe observarse también para el arquitrabe y su cornisa. Y si en dicho estilóbato preferís hacer otro ornamento que no sea el de follaje o animales, como se acostumbra, hacedlos dentro de su superficie de manera que no queden perturbadas las equidistantes *cd* y *fe* y también *ce* y *df*. Dicho estilóbato debe ser alto como dos veces su ancho, es

decir, exactamente dos longitudes del plinto columnar, para que sea debidamente proporcionado en uno y otro aspecto, es decir, a la fuerza del peso y a la elegancia visual que corresponde a las otras partes del edificio, como veis en el ejemplo de la figura de la puerta llamada *speciosa*, puesta al principio del libro y compuesta de la columna, estilóbato, epistilo y cornisa para que podáis daros cuenta del conjunto. Este basamento conviene que esté bien firme en su base, para él y para todo lo de arriba, es decir, con cimientos bajo tierra hasta su nivel que por lo menos coincidan [con la base] y estén hechos por un buen albañil, pues de otra manera vuestras obras se desmoronarían con todo el edificio. Ha de hacerse su ancho por lo menos tanto cuanto abarca la base del estilóbato, cuando no más. Y notad bien que los salientes de su base *abc* deben sobresalir de un lado y del otro tanto cuanto los de su capitel *efmn*, o bien podréis a veces hacer los de las bases más largos que los del capitel pero nunca más cortos, como, por ejemplo, veis en dicha figura. Su cimiento, los antiguos lo llaman *stereobata* y se entiende que es exactamente tanto cuanto ocupa la base del estilóbato *ab*. Así, pues, todo esto grabáoslo bien en vuestras mentes.

Al respecto debéis también notar, para las distintas molduras de la base y del capitel de dicho estilóbato, que a veces, según el lugar donde están situados, tienen nombres distintos, pero si ponéis cierto ornato en piedra labrada en una puerta y otros similares en la ventana y en la chimenea, éstos, sin embargo, conservan su nombre, a saber, *stipite, cardinale, fregio*, etc.

Esto sucede aquí en la base y en el capitel del estilóbato, pues la moldura superior de su capitel los antiguos la llaman *acroterio*, la que le sigue *cimatio* y los nuestros *intavolato*; la tercera *fastigio*, la cuarta *echino* y los nuestros *uovolo*, la quinta *balteo* o *trochilo*; los nuestros la llaman *regolo*; a la séptima los antiguos la llaman *taenia*; los nuestros a la que está inmediatamente encima del estilóbato la llaman *intavolatura*.

No dudo de que vosotros con vuestro ingenio aprenderéis tales términos mucho más que si yo los nombrara. Muchos acostumbran poner en dicho basamento bellas antiguas y bien proporcionadas letras, que algunos encargan y que expresan lo que ellos quieren recordar; y así en otros frontispicios, ornamentos y monumentos con sus epitafios, los que sin duda alguna otorgan mucha gracia a la construcción. Por esto, y con tal objeto, he puesto también en esta obra nuestra, titulada *La Divina Proporción*, el modo de dar forma, con todas sus proporciones, al hermoso alfabeto antiguo mediante el cual podréis hacer inscripciones en vuestros trabajos. Tendréis oportunidad para ello, y todos, sin duda, recomendarán vuestras obras. Os advierto que lo dispuse de tal manera sólo para que los inscriptores y miniaturistas, que escasean tanto, entiendan claramente la muestra, sin necesidad de recurrir a la pluma o pincel, y para que puedan trazar lisa y llanamente, a la perfección, las dos líneas matemáticas, curva y recta, del mismo modo que hacen las demás cosas, pues sin ellas no es posible hacer bien nada. Esto podéis verlo plenamente en las disposiciones de todos los cuerpos regulares y dependientes, que hemos visto antes, en esta obra, los que ha hecho ese dignísimo pintor, perspectivo, arquitecto y músico, dotado de todas las virtudes, que es LIONARDO DA VINCI, en nuestra ciudad de Milán, cuando a sueldo del excelentísimo duque de esa ciudad, LUDOVICO MARIA SFORZA ANGLO, nos encontrábamos desde el año de nuestra salvación 1496 hasta el 99, fecha en que luego, por distintos acontecimientos en ese lugar, salimos juntos de ahí y también juntos constituimos nuestro domicilio en Florencia.

Es así que tales nombres se encuentran también en la base de dicho estilóbato, con el agregado de *sima, bastone, intavolato*, etc.

Las formas de dichos cuerpos materiales, con toda su bellísima hermosura, las hice aquí, en Milán, con mis propias

manos, coloreándolas y adornándolas. Su número fue de sesenta, entre regulares y sus dependientes. Otras tantas asimismo las hice para mi señor protector GALEAZZO SAN SEVERINO, en el mismo lugar, y luego, en Florencia, [construí] otras tantas para Su Excelencia nuestro señor gonfalonero perpetuo PIER SODERINI, las que al presente se encuentran en su palacio.

CAPÍTULO VII

EN QUÉ DIFIEREN LAS TRES ESPECIES DE DICHAS COLUMNAS. ❧ Debéis notar también que dichas suertes de columnas, es decir, jónica, dórica y corintia, en lo que se refiere a sus bases y estilóbatos, se hacen todas de una misma manera, pero sus capiteles son distintos. El de la jónica, es decir de la *pulvinata*[85], es melancólico, pues no se eleva con altivez, lo cual tiene algo de melancolía y de debilidad de viuda. Levanta dicho capitel sólo media cabeza, es decir, medio grosor de la columna, sin otro ábaco u otro cimacio. Tiene sólo las volutas todo alrededor, vueltas hacia abajo, en el sentido de la longitud de la columna, a semejanza de las mujeres afligidas y de cabellera suelta y desordenada. En cambio, la corintia tiene su capitel erguido y adornado de follaje y volutas, con su ábaco y cimacio, como se ha dicho, a semejanza de las jóvenes aseadas, alegres y adornadas con encajes, en cuyo honor fueron dedicadas.

Para mayor gracia, los antiguos acostumbraron dividir longitudinalmente tales columnas en ocho partes iguales, tomando una de éstas para el grosor o diámetro de la parte estrecha inferior, lo cual otorga mayor gracia a su aspecto. Pero no se acostumbraba poner estas columnas en edificios demasiado austeros, sino en lugares amenos como logias, jardines, galerías y otros lugares de paseo. Las dóricas tienen sus capiteles altos en la medida y proporción ya indicada, pero no con tanto ornamento sino con un puro y simple tambor o

tímpano[86], a semejanza del varón, como MARTE, HÉRCULES, etc., en cuyo honor fueron dedicadas. Estas columnas, aunque hoy poco usadas, por ser escuetas y simples, tienen mayor fuerza que las corintias, para soportar el peso. Los antiguos acostumbraban dividir su altura en seis partes iguales, pues los jonios, como no tenían una simetría determinada, sino que, al tanteo, hicieron tales columnas en templos, y habiendo encontrado la forma y huella, o rastro, del pie humano la compararon con la estatura del cuerpo y hallaron que era la sexta parte de su altura. Y con tal proporción antes solían hacer la altura y grosor de dichas columnas redondas, como dice nuestro VITRUVIO en el primer capítulo y también en el séptimo del libro quinto, según los lugares donde iban a destinarlas. Es así que también las jónicas son muy aptas para soportar el peso, pues están divididas a semejanza de las dóricas, aunque, como se ha dicho con respecto a las dóricas, por no ofrecer gracia a nuestra vista, al presente se usan poco. El tenerlas presentes en vuestra memoria os servirá para hacer cosas útiles más que pomposas, pues debéis disponerlas a vuestro criterio, y si no, obedeced al que paga y no se hable más.

Tal como ha sucedido desde entonces acá, muchos ingenios y naciones han acostumbrado a hacer arbitrariamente dichas columnas dándoles diferentes nombres y así también a sus capiteles, bases estilóbatos y demás partes, aun en otros edificios. Así dice VITRUVIO al final del primer capítulo de su cuarto libro: "sunt autem, quae iisdem columnis inponuntur, capitolorum genera variis vocabulis nominata, quorum nec proprietates symmetriarum nec columnarum genus aliud nominare possumus, sed ipsorum vocabula traducta et commutata ex corinthiis et pulvinatis et doricis videmus, quorum symmetriae sunt in novarum", etc.



Federigo da Montefeltro, Duque de Urbino. Mitad del retrato de los Duques pintado por Piero della Francesca.

De esta manera, se ha hecho de tales vocablos una gran confusión, llamándolas a su manera. Pero también los capiteles, dada su variedad, las hacen distintas. Y para vuestra tranquilidad y para confirmar nuestra sucinta exposición, pongo aquí la dignísima y autorizada opinión de nuestro VITRUVIO extractada de su antedicho quinto libro[87]; dice así: "hae civitates, cum Caras et Lelegas eiecissent, eam terrae regionem a duce suo Ione appellaverunt Ioniam ibique templa deorum inmortalium constituentes coeperunt phana aedificare. Et primum Apollini Pandionio aedem, uti viderant in Achaia, constituerunt et earn Doricam appellaverunt, quod in Dorieon civitatibus primum

factam eo genere viderint. In ea aede cum voluissent columnas collocare, non habentes symmetrias earum et quaerentes quibus rationibus efficere possent, uti et ad onus ferendum essent idoneae et in aspectu probatam haberent venustatem, dimensi sunt virilis pedis vestigium et id in aititudinem retulerunt. Cum invenissent pedem sextam partem esse altitudinis in homine, item in columnam transtulerunt et, qua crassitudine fecerun basim scapi, tantm sex cum capitulo in aititudinem extulerunt. Ita dorica columna virilis corporis proportionem et firmitatem et venustatem in aedificiis praestare coepit.

Item postea Dianae constituere aedem, quaerentes novi generis speciem iisdem vestigiis ad muliebrem transtulerunt gracilitatem, et fecerunt primo columnae crassitudinem octava parte, ut haberent speciem excelsiorem. Basi spiram apposuerunt pro calceo, capitulo volutas uti capillamento concrispatos circinos praependentes dextra ac sinistra collocaverunt et cymatiis et encarpis pro crinibus dispositis frontes ornaverunt truncoque toto strias uti stolarum rugas matronali more demiserunt, ita duobus discriminibus columnarum inventionem, unam virili sine ornatu nudam speciem, alteram muliebri subtilitate et ornatu symmetriaque sunt imitati. Posteri vero elegantia subtilitateque iudiciorum progressi, gracilioribus modulis delectati septem crassitudinis diámetros in aititudinem columnae doricae, ionicae novem constituerunt. Id autem quod Iones fecerunt primo, Ionicum est nominatum.

Tertium vero, quod Corinthion dicitur, virginalis habet gracilitatis imitationem, quod virgines propter aetatis teneritatem gracilioribus membris figuratae effectus recipiunt in ornatu venustiores. Eius autem capituli prima inventio sic memoratur esse facta. Virgo civis Corinthia iam matura nuptiis implicata morbo decessit. Post sepulturam eius, quibus ea virgo poculis delectabatur, nutrix collecta et composita in caladio

pertulit ad monumentum et in summo collocavit et, uti ea permanerent diutius sub divo, tegula texit. Is calathus fortuito supra acanthi radicem fuerit collocatus. Interim pondere pressa radix acanthi media folia et cauliculos circa vernum tempus profudit, cuius cauliculi secundum calathi latera crescentes et ab angulis tegulae ponderis necessitate expressi flexuras in extremas partes volutarum facere sunt coacti. Tunc Callimachus qui propter elegantiam et subtilitatem artis marmoreae ab Atheniensibus *catatechnos* fuerat nominatus, praeteriens hoc monumentum animadvertit, eum caladium et circa foliorum nascentem teneritatem, delectatusque genere et formae novitate ad id exemplar columnas apud Corinthios fecit symmetriasque constituit; ex eo quod in operis perfectionibus Corinthii generis distribuii radones. Eius autem capituli symmetria sic est facienda, uti, quanta fuerit crassitudo imae columnae", etc.

CAPÍTULO VIII

DÓNDE SE ENCUENTRAN LAS COLUMNAS MEJOR HECHAS EN ITALIA POR LOS ANTIGUOS Y TAMBIÉN POR LOS MODERNOS. No puedo entender, mis muy queridos lectores, por qué nuestro compatriota LEON BATTISTA ALBERTI, florentino, con quien durante muchos meses en el alma Roma, en tiempos del Pontífice PAULO BARBO de Venecia, viví en su domicilio a sus expensas y muy bien tratado, hombre sin duda de grandísima perspicacia y doctrina en humanidades y retórica, como bien se ve en las altas expresiones de su obra sobre arquitectura, hablando de ella en tal obra, con tanta amplitud, no haya observado en dicha obra la norma moral que formula el deber de cada cual de luchar por la patria, elogiándola no sólo con sus hechos sino también con alguna palabra. Pues, al contrario, el honor que otros le atribuyeron en esa obra lo ha apagado en gran parte cuando trató este asunto arquitectónico. En efecto, VITRUVIO, en muchos lugares de su libro, magnifica nuestra patria tanto por sus columnas como también por sus otras cosas, diciendo con respecto a esas columnas: *ornatae tuscanico more*, elogiándolas muchísimo, y otras veces: *ut in tuscanicis apparet*, lo cual no dice sino para su alabanza y recomendación. Nuestro LEON BATTISTA en esa obra dice *italico more* y llama itálicas las columnas y de ninguna manera toscanas, lo cual por cierto no deja de ser muy extraño, pues él y los suyos fueron siempre honrados por Toscana. Por

eso diré con el Apóstol: *Laudo vos, sed in hoc non laudo*. Por tanto, creo conveniente deciros la verdad con nuestro VITRUVIO con respecto a la Toscana y también a otras regiones, es decir, dónde se encuentran hoy, en Italia, las principales columnas redondas que, si no en su totalidad, siguen respondiendo en gran parte a las antiguas enseñanzas, máxime las de nuestro VITRUVIO. En forma similar VITRUVIO acostumbra observar; cuando en Roma no encontraba aquellas partes de la arquitectura que él trataba, decía abiertamente: *sed Romae tale genus non habetur, sed Athenis vel alibi*, según él bien sabía. De la misma manera os diré: en Florencia encuentro dicha arquitectura muy magnificada, sobre todo cuando al magnífico LORENZO DE' MEDICI comenzó a gustarle, pues él disponía para ella de muchísimos modelos, según me enteré por uno que trabajó para su gran amigo GIULIANO DA MAGLIANO en el digno palacio llamado Dogliuolo, en la ciudad de Nápoles, donde entonces yo me encontraba junto a nuestro CATANO CATANI DA BORGO y muchos otros mercaderes nuestros. De tal suerte, quienes hoy día quieren fabricar en Italia y fuera recurren en seguida a Florencia en busca de arquitectos. Digo la verdad y los hechos lo demuestran. Id a Florencia y veréis que no hay en Italia edificios construidos tan bien y con tanta diligencia como los suyos. Allí, a propósito de nuestras columnas, encontraréis en Santa Croce, nuestro convento, numerosas columnas dispuestas muy dignamente en el capítulo, en acuerdo con todas las demás partes de dicho capítulo, que figura entre las mejores construcciones de Italia. También en Santo Spirito, construcción moderna, se encuentran columnas muy bien formadas y dispuestas, y aún más, sin comparación, en el digno y adornadísimo pronaos del magnífico edificio de los Medici, San Lorenzo, construcción que entre las demás de Italia en nuestros días no tiene igual, quiero decir *ceteris paribus*. En ella hay muchas columnas situadas en completo orden de simetría y

de proporciones. Y así en la catedral de Pisa, donde se han reunido columnas de varias clases, que forman una especie de cañaveral; y se comprende que han sido trasladadas aquí desde distintas partes.

Lo mismo dicen algunos con respecto a las que están colocadas en el frente del Pantheon de Roma; aunque son de grandísima mole, no tienen, sin embargo, su debida armonía en la altura con respecto a sus bases y capiteles, como convendría a juicio de quien es experto en el arte. Lo mismo se dice de las de San Pietro y de San Paolo extramuros. En cambio las que están frente al altar de San Pietro, hechas en rosca, fueron traídas desde Jerusalén sacándolas del Templo de Salomón. Una de ellas posee inmensa virtud contra los malos espíritus, tal como he visto varias veces que hizo nuestro Salvador JESUCRISTO con su Santísimo tacto. Con respecto a estas no se da norma alguna sino en lo que se refiere a su altura, base y capitel, pero no con respecto a su enroscamiento, pues éste puede ser más estrecho o más ancho, a ojo. Lo mismo digo de las que se encuentran en la Piazza di San Marco, en Venecia, las que, aunque son grandes y gruesas, no observan la debida simetría de proporciones, pero que, bien miradas, tienen gran tendencia a afinarse en punta. Os digo con toda franqueza que no he visto otra parecida en ninguna otra parte de Italia y creo que hoy es la columna redonda más proporcionada, por su capitel, su altura y su grosor; sólo que ella no está situada sobre su propia base sino sobre un capitel invertido y ofrece a la vista gran elegancia. Creo además que no fue hecha para estar en aquel lugar. Esta columna, mis queridos lectores, está en la ciudad de Venecia en el capítulo de los frailes menores, en nuestro convento, llamado Ca Grande, donde acostumbran leer los sagrados doctores, en el segundo claustro. De manera que si cayereis por ahí os resultará interesante ir a verla con vuestros hilos e instrumentos, como yo he hecho, según dije a algunos de mis discípulos.

CAPÍTULO IX

DE LAS COLUMNAS LATERADAS. ❧ Habiendo hablado lo bastante sobre las columnas redondas, me pareció conveniente decir, además, algo sobre las lateradas[88] para que se vea que su construcción, al lado de las otras no es inútil, pues aparte de sustentar el peso en los edificios presentan en su aspecto extraordinaria elegancia.

Con respecto a éstas, en verdad, no diré otra cosa que lo que hasta ahora hemos dicho con respecto a las redondas, confiando en vuestro peregrino ingenio y con la ayuda de aquella parte, sumamente necesaria a todo artífice, que os he explicado con diligencia, es decir, la que se refiere a números y medidas con la práctica de sus proporciones. Estoy completamente seguro de que con tales cosas podréis dar la proporción adecuada a dichas columnas, con vuestros instrumentos apropiados, compás y regla, es decir, mediante la línea recta y la curva, con las cuales, según dijimos antes, toda operación se lleva a buen término. En efecto, en las letras antiguas puestas al principio de este nuestro volumen se ve claramente que siempre pueden hacerse con círculos y cuadrados en el caso de que no hubiese pluma o pincel, y aunque se diga que es difícil proporcionar el círculo al cuadrado con la ciencia *de quadratura circuli*, según todos los filósofos, *sit scibilis et dabilis, quamvis nondum sit scita neque data*. Tal vez ya nació quien dará la solución, como que yo a todo el que la negara me ofrezco a demostrársela *palpabiliter*.

Por tanto no digo sino lo que al respecto de dichas columnas he hablado antes en esta obra, a propósito de los cuerpos regulares y sus dependientes, por lo que os remito a aquel lugar, donde encontraréis el asunto tratado abiertamente.

CAPÍTULO X

DE LAS PIRÁMIDES REDONDAS Y LATERADAS. ❧ Las pirámides podréis fácilmente entenderlas también a través de las columnas, tanto redondas como lateradas, pues cada pirámide es siempre exactamente la tercera parte de su columna, según prueba nuestro EUCLIDES[89]. Por eso, respecto de ellas, dejaré también de lado sus disposiciones que no es posible desconocer, pues ellas, según dijimos, tanto en el peso como en la medida son la tercera parte del cilindro correspondiente. Su orden y figura los tendréis al comienzo de este tomo junto con todos los otros cuerpos ejecutados también por la mano de nuestro eximio compatriota LIONARDO DA VINCI, florentino, cuyos dibujos y figuras, en verdad, nunca hubo alguien que pudiera igualar.

CAPÍTULO XI

DEL ORIGEN DE LAS LETRAS DE TODA NACIÓN. Según recuerdo haber dicho antes, creí conveniente poner al principio de esta obra el alfabeto antiguo, sólo para demostrar a cada cual que, sin otros instrumentos, con la línea recta y con la curva pueden construirse no sólo aquél sino todo alfabeto de cada nación, ya sea hebrea, griega, caldea o latina, como varias veces tuve ocasión de decir para comprobarlo, aunque sus idiomas no me son conocidos, lo cual podría dar ocasión a que en tales idiomas se me hubiera gastado un embuste, sin que yo me diera cuenta. Así sucedió aquí en Venecia, a cierto extranjero en la Piazza di San Marco estando presente tal vez cincuenta dignos gentilhombres. Pero como el griego no cambia las figuras geométricas de sus letras, es decir que [éstas] no están encuadradas [en forma distinta, por ejemplo,] con cinco ángulos, podría yo ofrecerme a darles *quid nominis et quid rei* prometí, aclarándolo todo con los correspondientes pasajes de nuestro EUCLIDES. Más que esto no puedo hacer.

Quedóse el fraile[90] —así me llaman todos en esta ínclita ciudad— y esperé a imprimir mis libros, para cuyo objeto vine a parar aquí con licencia y apoyo de mi reverendísimo Cardinal de San Pietro in Vincoli, vicecanciller de nuestra Santa Madre Iglesia y sobrino de Su Santidad Nuestro Santo Papa JULIO II, quien me faltó demasiado temprano. No digo más acerca de lo que se me había pedido y de todo sea Dios alabado. Os aseguro

que dicho alfabeto puede ser de gran provecho para las obras escultóricas, en que se acostumbra mucho ponerlo, ya sea para epitafios o cosas semejantes, según se os ordenare, y sin duda proporciona suma gracia en toda clase de obras, como se ve en arcos triunfales y otras excelsas construcciones en Roma y otros lugares. Con respecto a estas letras y a otras, digo que su invención se hizo *ad libitum*, como se observa en los obeliscos en Roma y en otras obras en San Marco y en la sepultura de pórfido frente a la rotonda, guardada por dos leones. Para [adornar] esas letras se usaban en aquel tiempo plumas, cuchillos, animales, cuero de zapatos, aves, jarrones y cifras, y luego más adelante en su especulación los hombres fijaron estas letras que al presente usamos, pues encontraron la forma adecuada para saberlas hacer debidamente en curva con el compás y en línea recta con la regla. Y en el caso de que alguna hecha a mano no responda en la forma debida a las indicaciones y reglas de su formación, aun así, vosotros siguiendo dichos cánones las haréis siempre con suma gracia, y gustarán de ella los miniaturistas y otros dibujantes si se siguen, una por una, las reglas dadas para ellas.

CAPÍTULO XII

DEL ORDEN DE LAS COLUMNAS REDONDAS. CÓMO DEBEN FORMARSE CON SUS BASES, EN LOS EDIFICIOS. Visto y considerado a vuestra satisfacción cómo deben disponerse las columnas redondas, por vuestras manos y con vuestros instrumentos en el trabajo de escultura, ahora para los que han de colocarlas diremos a continuación la forma usada moderna y antiguamente.


Leonardo da Vinci (Presunto autorretrato).

Los antiguos acostumbraban levantarlas alineadas, distando una de otra un solo ancho. Columnas así dispuestas encontraron en Atenas y Alejandría de Egipto los que allí estuvieron. También acostumbraban ponerlas a distancia de un grosor y medio, y así se encuentran muchas en Roma. Otras han sido levantadas a distancia de dos anchos, otras de dos y medio. Ahora bien, todas estas formas fueron recomendadas por nuestro VITRUVIO, dada su fortaleza. En cambio, para mayor gracia se recomiendan la de los dos anchos y, mejor aún, la de dos y medio, pues por la razón indicada cuanto mayor es la distancia de las columnas,

más débiles resultan. Pero un buen arquitecto, antes de levantarlas, debe tener en cuenta el peso que han de soportar con su epistilo, cornisa, tígrafos y techo.

Ahora bien, no siendo el peso muy grande, se recomiendan mucho por su mayor gracia aquellas cuyo tetrante es de dos anchos y medio.

Con respecto a esto, observad, para comprender bien este vocablo tetrante, que con él se entiende siempre todo espacio que tiende a un cuadrado, con tal que esté hecho por líneas dispuestas de un modo uniforme. Digo esto porque arriba llamamos tetrante el espacio o intervalo que está entre un ángulo y otro del capitel. Se llaman también tetrantes los espacios o intervalos que están entre las columnas paradas y que VITRUVIO acostumbra llamar *intercolumnio*. También se entiende por tetrantes los espacios e intervalos entre un tígrado y otro, lo cual comprenderéis inmediatamente más adelante, cuando hablemos del epistilo. Ahora bien, con respecto a nuestro asunto, sostengo que VITRUVIO recomienda tales intervalos cuando, según dijimos, los arquitectos hayan tenido en cuenta cuidadosamente el peso. Desgraciadamente sobre éste no podemos dar completa noticia; pero quien está en el asunto conviene que arregle las proporciones a su criterio, pues VITRUVIO lo aclara todo en el autorizado texto que sigue.

En efecto, como dice VITRUVIO, el arquitecto ha de estar muy despierto en lo que se refiere a considerar lugares, distancias y pesos de los edificios, pues no siempre en cada lugar pueden guardarse las simetrías y las proporciones adecuadas, a causa de la angostura de los lugares y otros impedimentos. De ahí que muchos se vean constreñidos a dar a tales edificios una forma contraria a su deseo.

Por eso hay que atenerse lo más posible al cuadrado o al círculo y a sus partes, de alguna manera conocidas, y, si es

posible, que esto se haga por números o al menos por líneas. Todo esto él lo concluye con este autorizado y áureo párrafo de su quinto libro[91] puesto *formaliter* así: “Nec tarnen in omnibus theatris symmetriae ad omnes rationes et effectus possunt [respondere], sed oportet architectum animadvertere, quibus rationibus necesse sit sequi symmetriam et quibus proportionibus ad loci naturam aut magnitudinem operis temperari. Sunt enim res quas et in pusillo et in magno theatro necesse est eadem magnitudine fieri propter usum, uti gradus, diazeumata, pluteos, itinera, ascensus, pulpita, tribunalia et si qua alia intercurrunt, ex quibus necessitas cogit discedere a symmetria ne impediatur usus. Non minus si qua exiguitas copiarum, id est marmoris, materiae reliquarumque rerum, quae parantur in opere defuerint, paulum demere aut audicere, dum id ne nimium improbe fiat sed consensu, non erit alienum. Hoc autem erit, si architectus erit usu peritus, praeterea ingenio nobili sollertiaque non fuerit viduatus”. Etc.

Concluye brevemente que, además de arte, el buen arquitecto ha de tener ingenio, para suplir lo que falta y reducir lo superfluo, según la oportunidad y disposición de los lugares, a fin de que sus edificios no aparezcan monstruosos. A tal efecto o para cualquier otro, me puse a buscar con grandísimos afanes y largas vigilias las formas de todos los cinco cuerpos regulares con sus otros cuerpos dependientes. Y los que se encuentran en esta obra nuestra con sus cánones traté también hacerlos con su debida proporción para que contemplándolos sepáis, no lo dudo, adaptarlos a vuestros propósitos. Los demás técnicos y científicos sacarán de ellos no poca utilidad, cualquiera que sea el arte, oficio o ciencia a que se dediquen, según en su *Timeo* manifiesta el divino filósofo PLATÓN.

CAPÍTULO XIII

DE LOS INTERVALOS ENTRE UN TíGRAFO Y OTRO.

Lo que hemos dicho con respecto al lugar de las columnas, lo mismo digo que debe observarse con respecto a los tígrafos. En efecto, deben estar situados en la parte superior del edificio sobre las coronas o cornisas, y, sin embargo, de este modo deben tener gracia, pues siempre deben corresponder a sus columnas sobre las que están colocados. Es decir que si el tetrante de las columnas es de dos anchos o dos y medio, o uno, de la misma manera hay que hacer también los tígrafos de dos anchos, o dos y medio. De ningún modo se recomienda el espacio de tres anchos, como más adelante comprenderéis con respecto al epistilo.

CAPÍTULO XIV

DEL EPISTILO O ARQUITRABE Y SU ZOÓFORO. Y DE LA CORONA O CORNISA. ✽ Cuando estén levantadas en línea las columnas sobre sus estilóbatos, o *pilastri* según los nuestros, con sus bases y capiteles bien a plomo, como es debido, con sus hierros bien firmes, sobre sus capiteles se pone el *epistilio*, según lo llama nuestro VITRUVIO, que los modernos llaman *architrave*, para afirmar y trabar todas las columnas. Tal epistilo debe estar dispuesto en el siguiente modo: antes se le da una longitud igual a la que tiene la fila de las columnas situadas en línea recta sobre sus basamentos y estereóbatos, de manera que no salgan de la línea recta. Luego se pone un fastigio o faja cuya longitud se halla de este modo: fijaréis la altura de todo vuestro epistilo, a vuestro criterio, proporcionándolo suficientemente al peso y a sus columnas, según donde tengáis que colocarlas, ya sea en templos u otros edificios, como aquí *ah*. Tal ancho o altura lo dividiréis en siete partes iguales, con una de las cuales se hará la tenia, vale decir cimacio del epistilo, *h*, sobre la cual se afirma el zoóforo *v*, o *fregio* según los nuestros. Luego los otros seis séptimos se dividen en doce partes iguales, siendo cada una la catorzava parte de dichos siete séptimos. La faja de arriba abarca cinco de tales partes, es decir, cinco duodécimos de dichos seis séptimos, o sea el espacio *e*; la mediana, *c*, abarca cuatro y la inferior tres. Tales fajas se acostumbra también llamarlas *fastigii*. La mayoría de las veces a

cada epistilo se acostumbra asignarle tres fajas, es decir, inferior, mediana y superior. Sobre dichas fajas es decir, en el espacio *b*, se usa poner diversos ornamentos *ad libitum*, como *timpani, fusaroli* o *paternostri*[92], follajes, etc. Es decir que, entre una faja y otra, se hacen dichos adornos y esto se refiere al primero entre una faja y otra; el segundo, entre la tercera faja y la del medio, es decir *d*, se llama *intavolato*. Aquel que está sobre la última faja, es decir, el espacio *f*, los antiguos lo llaman *echino* y los nuestros *uovolo*, y aquel que está entre la tenia *h* y el equino *f*, es decir, *g*, los antiguos lo llaman *scotica* y los nuestros *gola* del epistilo o *architrave*. Entonces *b* debe ser ancho un tercio de *a*, y *f* justo como *a*, y *g* como *d*. Cada uno de ellos debe ser la mitad de *e* para que en su aspecto resulten elegantes. Y toda esta composición de fajas, *fusaroli, intavolato*, equino, escocia y tenia, los antiguos las llaman *epistilio* y los nuestros lo llaman *architrave*, el cual, según dijimos, va de un cabo a otro encadenando las columnas. Dicha disposición es tal que, como dice en el tercer libro[93] VITRUVIO hablando del intervalo o tetrante del templo de Apolo y del de Diana, si el intervalo es excesivo, el epistilo se romperá. Sus palabras son éstas: "cum trium columnarum crassitudinem intercolumnio interponere possumus, tamquam est Apollinis et Dianae aedes. Haec dispositio hanc habet difficultatem, quod epistylia propter intervallorum magnitudinem franguntur", etc. Y algo más abajo, en dicho capítulo: "Namque facienda sunt in intervallis spatia duarum, columnarum et quartae partís columnae crassitudinis, medium quoque intercolumnium unum, quod erit in fronte, alterum, quod in postico, trium columnarum crassitudine. Sic enim habebit et figurationis aspectum venustum et aditus usum sine impeditionibus", etc.

De esta manera, lo que él quiere es que dichos intervalos no sean demasiado enormes. Por eso dice que hay que hacer para tales intervalos las fajas *tuscanico more*; así, en aquel tiempo

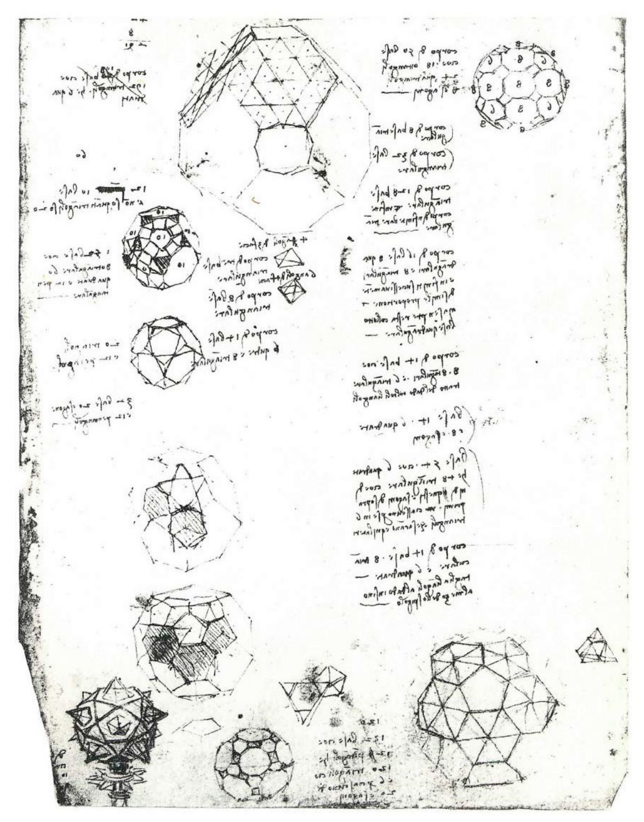
usaban hacerlas enrollando cobre alrededor de una fuerte viga de madera, que [luego] adornaban[94] y encontraba que era más firme y estable para el peso y no tan frágil, como [lo eran] la piedra y otros mármoles dado el gran intervalo.

CAPÍTULO XV

DEL ZOÓFORO EN EL EPISTILO. El zoóforo *v*, que los nuestros llaman *fregio*, tiene que ser ancho tanto como su epistilo y hacerse liso, sin ornamentos. De hacerse con ornamentos, se hace un cuarto más ancho que su epistilo para que resalte bien su gracia y para que dichos ornamentos puedan verse cómodamente desde lejos y desde cerca. Vale decir que si dicho epistilo es alto o ancho cuatro, el zoóforo debe ser ancho cinco, con los ornamentos, ya sean follajes, roleos u otros como animales, según se usa.

CAPÍTULO XVI

DE LA COMPOSICIÓN DE LA CORNISA. ☙ Sobre dicho zoóforo, se compone otra parte ornamental que los antiguos llaman *cornice*[95] y los modernos, *cornicione*; y a veces, los antiguos llamaban así toda la composición desde el zoóforo hasta el último elemento llamado cimacio de la cornisa, denominado por los antiguos *acroterio* y por nosotros, *regolo* sobrepuesto al zoóforo. La disposición de este conjunto debe ser de este modo: en primer término, inmediatamente sobre dicho zoóforo se pone un *regolo*[96] o *grado*, dicho de otra forma *gradetto*, por su pequeñez, y es un cuadrado a escuadra con saledizo hacia afuera todo a lo largo y según su ancho, es decir, tal que sobresalga del zoóforo justo cuanto es ancho. Los antiguos lo llamaban también *tenia*.



Dibujos y notas de Leonardo da Vinci. Atlántico, folio 272 verso, b.

De éstos se ponen comúnmente cinco de un mismo ancho, como divisiones, a semejanza de las fajas en el epistilo, más bien para ornamentar que para fortalecer; como puedes ver en el ejemplo puesto al principio del libro, donde no están marcados por signo alguno, a diferencia del cimacio *h* del epistilo.

Sobre éste se pone justamente un cuadrado como faja del epistilo, llamado por VITRUVIO *denticoli* y por los modernos *denticelli* y a veces *rastro*, por su semejanza con el rastrillo hecho de dientes; esto se ve en la figura donde está marcado *l*. Entre éste y el cimacio del friso, marcado con *k*, se pone una tenia. Sobre ésta, se coloca otro elemento, como bastón, llamado *paternostri* o *fusaroli* y sobre éste el otro cuadrado o tenia. Luego, inmediatamente se coloca la corona, *m*, que los antiguos

llamaban así y los modernos *gocciolatoio*, luego la otra tenia, luego la moldura de *paternostri* o fusarolas. Además de esto hay otro cuadrado y en penúltimo término su *sima*, que los modernos llaman *gola* de la cornisa, como se ve en la moldura *o*. Por último, según dijimos, se pone su acroterio, es decir, otra tenia, y así queda terminada toda dicha cornisa, entendiéndose, como otras veces se ha dicho en el caso del estilóbato y arquitrabe, que todas estas molduras sobresalen de uno y otro lado, derecho e izquierdo, tanto cuanto es su ancho, a fin de que en su aspecto logre gracia todo el edificio y quede gradualmente bien encadenado mediante el empico de hierros, plomos, etc.

CAPÍTULO XVII

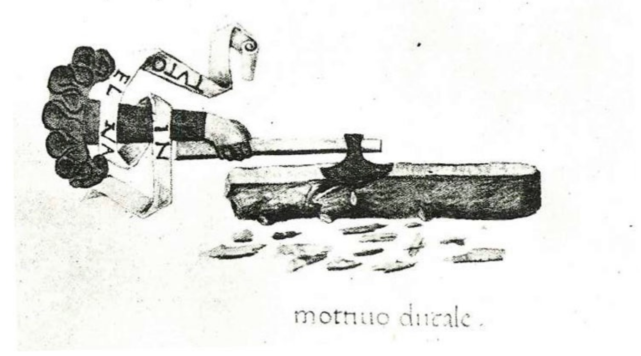
DEL SITIO DE LOS TÍGRAFOS. ☙ Sobre toda la composición indicada, epistilo y cornisa, se ponen por último y encima de todo los *tígrafos*, es decir ciertas pequeñas pilastras con tres costados, dos de los cuales acanalados como ciertas columnitas cuadradas, distantes unos de otros dos veces su ancho y a veces tres, exactamente como las columnas sobre las cuales están situados, no con intervalo hueco sino macizo, como parapetos hechos con planchas apropiadas. En ellos se acostumbra hacer ornamentos, como cabezas de bueyes o de caballos, guirnaldas, bastoncitos, rosetones en relieve, etc.

Habría mucho que decir sobre esto, pero el tiempo, por ahora, no me lo permite, pues continuamente, día y noche, debo dirigir, junto a los tórculos y calcógrafos, nuestras obras, con toda diligencia, como se requiere. Pero para satisfaceros he querido poner aquí estas pocas indicaciones a manera de ligera referencia, porque esperamos escribir con mayor amplitud respecto de dicha arquitectura. Habiendo incluido la columna y el epistilo con su corona y su zoóforo, creí conveniente reunirlos y mostrar sus efectos. Por eso los he colocado, como veis, en aquella puerta llamada *Speciosa*, donde podréis cercioraros, *oculata fide*, de todas sus partes, de que hemos hablado, unidas sobre el frontispicio triangular, según acostumbran todos los antiguos y modernos, en tales composiciones majestuosas.

CAPÍTULO XVIII

CONSEJOS A LOS CANTEROS Y OTROS ESCULTORES, CON RESPECTO A DICHOS CUERPOS. ❦ Habiendo hablado lo suficiente para vuestras necesidades, además de todo lo que he dicho, os recuerdo que no habrá nada que censurar en vuestras obras si a veces, conforme a vuestro mejor criterio, ponéis en ellas como base o capiteles algunos de aquellos cuerpos matemáticos que os he mostrado varias veces en su propia forma material, aunque de ellos nuestro VITRUVIO no hace mención particular alguna. Todo lo contrario, darán gran realce a vuestra edificación, pues no sólo le proporcionarán adorno sino que ofrecerán además, a los doctos y a los sabios, motivos de especulación, ya que estarán siempre construidos conforme a aquella científica y divina proporción que tiene el medio y dos extremos. A propósito, recuerdo que en Roma en casa del señor MARIO MELINI, barón romano, leí en ciertos anales romanos que FIDIAS, escultor supremo, hizo en cierta parte de Roma, en el templo de Ceres, cierto trabajo donde puso el cuerpo llamado icosaedro, figura del agua, que numerosos filósofos ensalzaban muchísimo, fijando su contemplación en aquél, más que en cualquier otra parte de la obra, que en su conjunto era también del todo excelente. Las formas de tales cuerpos, hechas por mi propia mano, las tenéis en la Cancillería en Roma, en Florencia y Venecia, en gran cantidad. De tal suerte os alabarán siempre si pusiereis algunos

de ellos, haciéndolo en el modo que yo os mostré y siguiendo además lo que antes se ha dicho respecto de ellos en esta obra.


lopere del predicto uictruuio .Dalqual deuan
do se uede commo stanno uostri hedificii sidi
uini como profani.chi e torto e chi bistorto.
E pero conuenientissimo fia el motto e suo effecto

motiuo ducale.

Página del manuscrito de *La Divina Proporción*, Biblioteca de Ginebra.

CAPÍTULO XIX

CÓMO DEBE CONDUCIRSE EL ARQUITECTO CON RESPECTO A LA DISPOSICIÓN DE SU OBRA EN LOS LUGARES ANGOSTOS. Debe el arquitecto ser muy perspicaz al aconsejar a otros sobre sus edificios y en la presentación de los modelos correspondientes para que no causen gastos inútiles al patrón. En efecto, nuestro VITRUVIO nos ha enseñado muy bien las debidas formas de los edificios con su simetría y proporciones. Sucederá a veces que la angostura o estrechez del lugar no permitirá fabricar con toda aquella solemnidad que corresponde a la verdadera arquitectura, a causa del impedimento del lugar, que no lo permitirá.

Por esto, se os recuerda que, no pudiendo ejecutar totalmente vuestras obras como deberían hacerse, habréis de ateneros siempre al cuadrado y al círculo, que son las dos principales formas de las dos líneas, recta y curva. Y si no podéis hacer todo el cuadrado o círculo, tomaréis de ellos siempre alguna parte (o partes) conocida, como la mitad, un tercio, tres cuartos, dos tercios, etc., de su circuito o de los diámetros, proporcionándolos siempre, cuanto más podáis, en partes conocidas que puedan mostrarse por número, si no están sometidos a la irracionalidad como entre el diámetro del cuadrado y su costado. Por eso, marcaréis con vuestra escuadra y vuestro compás sus términos en líneas, dibujándolos, pues, aunque no siempre puede asignárseles un número, sin embargo

nada impide que se marquen superficies por medio de líneas, pues la proporción es mucho más amplia en la cantidad continua que en la discreta. En efecto, la aritmética no considera más que la racionalidad; la geometría, la racionalidad e irracionalidad, como dijo cabalmente nuestro EUCLIDES en su quinto libro de los *Elementos* y nosotros, siguiéndolo en la teoría y en la práctica para vuestro amaestramiento, en nuestra obra grande titulada *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalità*, en la sexta sección y primer artículo del primer tratado, obra impresa en Venecia en 1494 y dedicada al magnánimo Duque de Urbino, a la que os remito para cualquier duda que se os ocurra.

Tenéis además, en este volumen, como ya os dije, el muy digno alfabeto antiguo, con el cual podréis adornar vuestras obras e inscribir lo que desean vuestros patrones, ya sea en sepulcros o en otros trabajos. Tal alfabeto confiere extraordinaria dignidad a la obra, como se manifiesta en muchos lugares de Roma. Y esas [letras] ya se acostumbraba hacerlas de metales varios y afirmarlas en sus partes, tal como se ve en sus vestigios en el Capitolio y en el Palacio de Nerón. Y no se quejen los inscriptores y los miniaturistas; si he declarado en público tal necesidad, lo hice sólo para mostrar que las dos líneas esenciales, recta y curva, forman todas las cosas que [……][97] puedan inventarse, y por esa razón frente a sus ojos, sin su pluma y sin su pincel, les he puesto el cuadrado y el círculo, para que vean perfectamente que todo procede de las disciplinas matemáticas [……][98]. Aquí pondremos fin a nuestra exposición rogando insistentemente que entre vosotros os reunáis, como buenos hermanos, para dilucidar mejor todo lo que hemos dicho, pues será fácil agregar nuevas cosas a las ya encontradas. Estoy seguro de que vuestros peregrinos ingenios lo harán así por su honor, como también por el de la tierra nuestra, de la cual siempre en todas las actividades, como habréis podido

oír por boca de vuestros antepasados, han salido hombres dignos, aunque el lugar fuera pequeño y muy poblado, y también grandes ingenios tanto *in militaribus*, según hemos dicho antes, brevemente, como también en otras disciplinas y ciencias. En lo que respecta a las matemáticas lo ilustra claramente el monarca de la pintura y arquitectura en nuestros días, maestro PIERO DELLA FRANCESCA con su pincel, cuya potencia se muestra en Urbino, Bolonia, Ferrara, Rímini, Ancona y en nuestra tierra en pintura mural y sobre tabla al óleo y al temple, máxime en la ciudad de Arezzo, en la magna capilla del altar mayor, una de las más dignas obras de Italia, que goza de general prestigio. Compuso además el libro de perspectiva que se encuentra en la muy valiosa biblioteca de nuestro ilustrísimo Duque de Urbino. Por eso emplead vuestro ingenio en hacer lo mismo.

CAPÍTULO XX

DE LAS COLUMNAS SITUADAS SOBRE OTRAS COLUMNAS, EN LOS EDIFICIOS. Como hasta aquí no os he hablado de las columnas redondas que a veces se acostumbran poner sobre otras en los edificios como en nuestro convento de Santa Croce en Florencia, en su digno claustro, y en otros lugares de Italia, diré cómo deben disponerse para que su colocación responda debidamente al peso y a la belleza. Esto lo aclara nuestro VITRUVIO con el siguiente párrafo de su quinto libro[99], donde dice así: "columnae superiores quarta parte minores quam inferiores sunt constituendae, propterea quod oneri ferendo quae sunt inferiora firmiora debent esse quam superiora. Non minus quod etiam nascentium oportet imitari naturarli, ut in arboribus teretibus, abiete, cupresso, pinu, e quibus nulla non crassior est ab radicibus, dein decrescendo progrcditur in altitudinem naturali contractura peraequata nascens ad cacumen. Ergo si natura nascentium ita postulat, recte est constitutum et altitudinibus et crassitudinibus superiora inferiorum fieri contractiora.

Basilicarum loca adiuncta foris quam calidissimus partibus oportet constitui, ut per hiemem sine molestia tempestatium se conferre in eas negotiatores possint. Earumque latitud ines ne minus quam ex tertia parte, ne plus ex dimidia longitudines constituantur, nisi [si] loci natura impedierit et aliter coegerit y symmetriam commutari. Sin autem locus erit amplior in

longitudine”, etc. Y más abajo insiste: “Columnae superiores minores quam inferiores, uti supra scriptum est, constituantur Pluteum, quod [fuerit] inter superiores et inferiores columnas, item quarta parte minus, quam superiores columnae fuerint, oportere fieri videtur, uti supra basilicae conglutinationem ambulantes ab negotiatoribus ne conspiciantur. Epistylia zophora coronae ex symmetriis columnarum, uti in tertio libro scripsimus, explicentur.

Non minus summanm dignitatem et venustatem possunt habere compactiones basilicarum, quo genere columnae iuliae fenestris collocavi curavique faciendam, cuius proportiones ex symmetria sic sunt constitutae. Mediana testudo”, etc.

Este digno y autorizado documento, mis muy queridos [lectores], fue expuesto a ciertos prelados del Duomo de Milán en 1498, en su inexpugnable fortaleza, en la cámara llamada “de los Moroni”, en presencia del excelentísimo duque de Milán LUDOVICO MARÍA SFORZA con el muy reverendo cardenal IPPOLITO D‘ ESTE y su cuñado el ilustre señor GALEAZZO SAN SEVERINO, mi particular protector, y muchos otros famosísimos personajes, como sucede en presencia de gente de tal categoría. Entre otros estaba vuestro eximio e ilustre doctor, el Conde y Caballero Messer ONOFRIO DEI PAGANINI DA BRESCIA, dicho DA CEVELLI, que fue quien expuso públicamente a todos los presentes dicho documento, induciéndolos a dar su máxima aprobación a nuestro VITRUVIO, en cuyas obras parecía que estuviese instruido *a cunabulis*. Dicho filósofo, *breviter*, sostiene —y no necesito extenderme más allá de lo que he dicho con respecto a las columnas alineadas, sobre las que, según dijimos, se afirma el epistilo con todas sus partes: zoóforo, corona o cornisa, etc.— que, cuando se hacen otras columnas sobre aquéllas, como se acostumbra en palcos y logias, hay que tener en cuenta que también ellas deben aguantar peso, pero no tanto como las de abajo. Por eso él, con toda razón, aduce la adecuada

y segura proporción que las de arriba deben tener; vale decir que deben tener un cuarto menos que las inferiores, pues éstas deben ser siempre más firmes, por la razón indicada.

Como argumento de ello trae el ejemplo que ofrece la maestra de todas las cosas, es decir la naturaleza, la cual, como se ve en los árboles y otras plantas, abetos, cipreses, pinos, etc., en los cuales se ve siempre que las cimas o cúspides son más débiles que sus raíces y fundamentos, nos muestra, según él dice, que en esto no podemos equivocarnos, si la imitamos. Considerando, por este ejemplo, que en los edificios las columnas de abajo son base, raíz y fundamento de todo lo que está puesto arriba de ellas, es decir que son como la base del árbol, que es sostén de todas las otras ramas que están arriba y que siempre son más débiles que la base. Pero en qué medida justamente deben serlo, según proporción segura, nosotros lo desconocemos. Pero, como *ars imitat naturam in quantum potest*, él no tomó exactamente la debida proporción y habitud de las ramas y cimas en los árboles con respecto a sus troncos, estípites, y tallos, pues aquélla no podemos conocerla sino por concesión del Altísimo, como dice en su *Timeo* PLATÓN, para cierto secreto propósito: *Haec enim soli Deo nota sunt, at que ei qui Dei sit amicus*.

Por tanto, para que la obra no vaya a tientas, sino con la mayor certeza posible, VITRUVIO nos da la única proporción conocida y segura, la cual es racional y se puede expresar por número, diciendo que las columnas de arriba deben hacerse un cuarto más chicas que las inferiores, pues no están destinadas a un peso tan grande, como se ve claramente. Así, en aquel lugar de la obra, él mismo dice haberlas colocado en ciertas aberturas de esta manera y ordenó que así se hicieran, con esa simetría y proporciones, salvo que, en este lugar y también en otras partes de las obras, la naturaleza del lugar impidiera que esto se pudiese observar, y nos obligara a cambiar de otra manera dicha

simetría.

En efecto, como vemos hoy, hay que fabricar según la forma del sitio edificable y entonces no hay que empeñarse en realizar a toda costa las debidas simetrías de las proporciones, pues a la fuerza estamos obligados a fabricar según el sitio nos lo permita. Y por esto no es de extrañar si en nuestros tiempos se ven muchas construcciones que parecen monstruosas en sus ángulos y en sus frentes, por no haber podido observar plenamente las reglas necesarias. Y por tanto las enseñanzas que se os han dado antes, para vuestras disposiciones ya de construcción, ya de escultura, esforzados cada vez más en cumplirlas, acercándoos al cuadrado, al círculo y a sus partes lo más posible, pues a pesar de estar impedidos por la angostura de los lugares saldréis siempre airosos y de ninguna manera vuestras obras serán censuradas. Sírvaos esto de saludable enseñanza.

Dichas columnas superiores deben sobreponerse exactamente sobre las inferiores, correspondiendo sus pequeñas bases a los capiteles, bases y estereóbatos de las columnas inferiores, pues de otra manera, si se desviaran de sus estereóbatos, es decir, del fundamento subterráneo de la columna inferior, el edificio se derrumbaría, por estar las columnas superiores fuera de la perpendicular de las inferiores. Espero que por ahora esto os sea suficiente hasta otra oportunidad, si Dios os lo permite.

Bene valete y rogad a Dios por mí.

FINIS

Venetiis impressimi per probum virum Paganinum de Paganinis de
Briscia, decreto tarnen publico ut nullus ibidem totique dominio
annorum XV curriculo imprimat aut imprimere faciat et
alibi impressum sub quovis colore in publicum ducat
sub poenis in dicto privilegio contends, anno
Redemptionis nostrae MDIX, Kalendas
Iunias, Leonardo Lauretano Venetam

Rempublicam gubernante,
pontificates Iulii
II anno VI.

[PARTE TERCERA][100]

LIBELLUS IN TRES PARTIALES TRACTATUS DIVISUS QUINQUE CORPORUM REGULARIUM ET DEPENDENTIUM ACTIVAE PERSCRUTATIONIS, B. PETRO SODERINO PRINCIPI PERPETUO POPULI FLORENTINI A M. LUCA PACIOLO BURGENSE MINORITANO PARTICULARITER DICATUS, FELICITER INCIPIT. Los cuerpos laterados pueden muy bien colocarse en el cuerpo esférico, tocando con todos sus ángulos la superficie de la esfera. Pero sólo son cinco los cuerpos regulares, es decir, los que tienen lados y bases iguales, según dijimos antes. El primero es el de cuatro bases triangulares, el segundo es el cubo, que tiene seis caras cuadradas, el tercero es el de ocho bases triangulares, el cuarto es el de doce bases pentagonales, el quinto es de veinte bases triangulares. De tales cuerpos es mi intención mostrar con números, raíces y binomios su cantidad y sus medidas.

Como tales medidas y cantidades no se pueden obtener sin las de sus bases y superficies, es necesario por eso empezar por sus bases y establecer, como dijimos, qué es superficie triangular, cuadrada, pentagonal; mostrar sus catetos, diagonales y la línea opuesta al ángulo pentagonal, es decir, la cuerda pentagonal. Luego hablaremos de dichos cuerpos y diremos algo del cuerpo esférico. Sobre esto daré tres breves tratados. En el primero se hablará de los lados y de la superficie de las bases, en el segundo de los cuerpos laterados y de sus superficies y cuadraturas, en el tercero de los cuerpos contenidos uno por otro y algo de la esfera, si Dios quiere, etc.

TRATADO PRIMERO

CASO 1. *El cuadrado del lado de toda superficie triangular es sesquitercio con respecto al cuadrado de su cateto.* *Verbi gratia*: sea una superficie triangular, equilátera, *abc* y cada lado sea 4 y su cuadrado 16; digo que el cuadrado del cateto es 12. Prueba: el triángulo dado, *abc*, es equilátero, de manera que bajando del ángulo *a* la perpendicular cae sobre la línea *bc* en ángulo recto, dividiendo aquélla en el punto *d*, en ángulo recto. Entonces, por la penúltima del primer libro de EUCLIDES, la potencia de *ab* es igual a la potencia de *ad* más la potencia de *bd*, pues *ab* se opone al ángulo *d*, que es recto, y como *bc*, que es igual a 4, está dividido en partes iguales en *d*, será *bd* igual a 2. Éste, multiplicado por sí mismo, da 4, que es la cuarta parte de la potencia de *ab*, es decir, de 16, y la potencia de *ab* es igual a la potencia del cateto *ad* más la potencia de *bd*, que es 4, es decir, la cuarta parte de 16. Entonces, la potencia del cateto *ad* es igual a las tres cuartas partes de la potencia de *ab*, que es 16, y las tres cuartas partes dan 12, que junto a la potencia de *bd*, que es 4, da 16; de manera que la potencia del cateto es 12, siendo así sesquitercia con respecto a la potencia del lado del triángulo, que es 16.

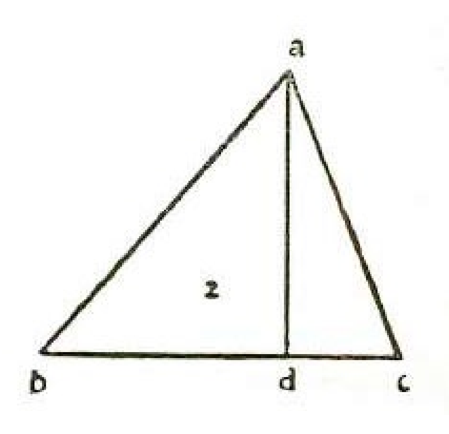
Pero cuando los triángulos no son equiláteros, no sirve esta proporción, y en tal caso el cateto se halla de otra manera. Supóngase que los lados del triángulo *abc* sean: *ab* igual a 15; *bc*, 14, y *ac*, 13; y que *b e* sea la base, que es igual a 14. Multiplíquese esto por sí mismo y dará 196; luego multiplíquese por sí mismo *ac*, que es 13, y da 169; agrégueselo a 196 y da 365; ahora, multiplíquese por sí mismo *ab*, que es 15, y da 225; réstese esto de 365 y da 140. Esto debe dividirse siempre por el doble de la base, la cual hemos dicho que es 14, y que

duplicada da 28; divídase entonces 140 por 28 y resulta 5. Di que 5 es lo que va desde el ángulo *c* al punto donde termina el cateto, y es la parte más pequeña; multiplíqueselo por sí mismo y da 25, luego multiplíquese por sí mismo el lado menor del triángulo, que es 13, y da 169; réstese 25 y queda 144. La raíz de 144, que es 12, es el cateto que cae sobre la base *bc*.

Ahora bien, si prefieres que el cateto caiga sobre *ab*, que es 15, multiplica esta cifra por sí misma y da 225; luego multiplica 13 por sí mismo y da 169, suma y da 394. Luego multiplica 14 por sí mismo y da 196; réstalo de 394 y queda 198; esta cifra divídela por la base duplicada, que da 30, y resulta $6\,\frac{3}{5}$, que será lo que va desde el ángulo *a* al punto donde cae el cateto. Multiplica por sí mismo *ac*, que es 13, y da 169; resta de esta cifra $6\,\frac{3}{5}$ multiplicado por sí mismo, es decir, $43\,\frac{14}{25}$, y queda $125\,\frac{11}{25}$. La raíz de $125\,\frac{11}{25}$ es el cateto, es decir, $11\,\frac{1}{5}$. Se procede así, cualquiera que sea el lado en que caiga el cateto; tal lado será la base; multiplica aquélla por sí misma y [el resultado] súmalo al de la multiplicación de uno de los lados, luego resta de él [el resultado de] la multiplicación del otro lado y divide luego por el doble de la base; lo que resulta multiplícalo por sí mismo y lo que da réstalo de la multiplicación del lado que sumaste a la multiplicación de la base; la raíz de lo que resta es el cateto que cae sobre la base *ab*. De la misma manera procede con los otros triángulos, cualesquiera que sean.

CASO 2. *La superficie del triángulo se obtiene. multiplicando el cateto por la mitad de la base donde cae dicho cateto.* Tú tienes el triángulo *abc*, que es equilátero, y cada uno de sus lados es igual a 4. Por la regla anterior el cateto es raíz cuadrada de 12 y la mitad de la base *bd* es 2. Ahora bien, como debes multiplicar por un cuadrado, eleva al cuadrado 2 y da 4, multiplícalo por 12 y da 48 y tienes que la superficie de tal triángulo es raíz de 48, según se prueba por la cuadragésimo

primera del primer libro de EUCLIDES.



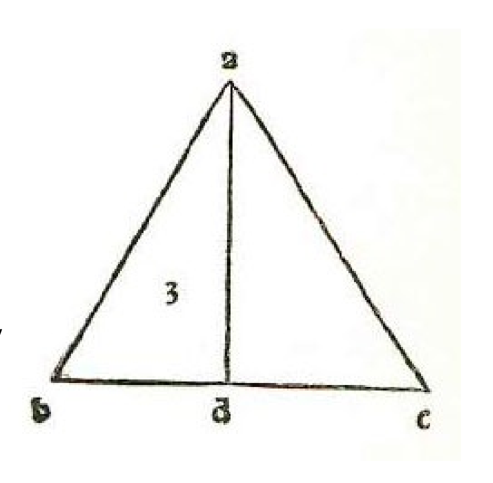
[Supongamos que] el triángulo *abc* no sea equilátero y que *ab* sea igual a 15; *bc*, a 14 y *ac*, a 13; el cateto *ad* que cae sobre la base *bc* igual a 14, es igual a 12. Toma la mitad de 14, es decir, 7, multiplícala por 12 y da 84, que es la superficie del triángulo *abc*, cuyos lados son uno igual a 15, otro a 14 y el tercero a 13. Esto se comprueba también por la mencionada regla de EUCLIDES, pues multiplicando el cateto por toda la base, resulta un cuadrado cuya superficie es 168, es decir, doble con respecto a la del triángulo; el triángulo será entonces la mitad, es decir 84, según dijimos.

CASO 3. *Conociendo la superficie y un lado de un triángulo, se obtiene la cantidad de los otros dos lados.* ℞ *Verbi gratia*: si la superficie del triángulo *abc* es 84 y un lado 14, digo que esto permite conocer los otros dos lados.

Tú sabes que multiplicando el cateto por la base resulta la superficie del triángulo; por tanto, dividiendo la superficie del triángulo por la mitad de la base resulta de ello el cateto y dividiendo [la superficie] por el cateto resulta la mitad de la base.

Procede por álgebra: supón que el cateto sea 1 *cosa*; la mitad de la base, que es 14, es 7; multiplica 1 *cosa* por 7 y da 7 *cosas*; esto es igual a la superficie, vale decir, a 84; divide por 7 y da 12, que es igual a la *cosa* que supusimos ser el cateto. Entonces el cateto es 12; multiplícalo por sí mismo y da 144; toma una parte de 14, toma, si quieres, 8[101] multiplícalo por sí mismo y da 64; agrega 144 y da 208 y raíz de 208 es *ab*. De 8 a 14 resta

6; multiplica esta cifra por sí misma y da 36; agrega 144 y da 180. La raíz de 180 es *ac*, es decir, lo propuesto.



CASO 4. *Dado el triángulo cuya superficie es 100 y cuyos lados están en proporción sesquitercia, hallar la cantidad de tales lados.* Haz de esta manera: toma un triángulo cuyos lados estén en proporción sesquitercia y sea tal triángulo *abc*; sea *ab* igual a 16; *bc*, a 12, y *ac*, a 9; es decir, están en proporción sesquitercia; ahora cuádralo[102]: encuentra el cateto que cae sobre *ba* y que es raíz de $44\,{}^{639}/_{1024}$, y multiplícalo por la mitad de la base *ba*, que es 8; eleva al cuadrado 8 y da 64, multiplica 64 por $44\,{}^{639}/_{1024}$ y da $2855\,{}^{15}/_{16}$; luego eleva al cuadrado 100 y da 10.000; eleva al cuadrado un lado del triángulo, es decir, *ac*, que es 9, y resulta 81; eleva al cuadrado 81 y da 6561. Entonces tú tienes que raíz de $2855\,{}^{15}/_{16}$ te da raíz de la raíz de 6581; ¿qué te dará raízde 10.000? Multiplica 10.000 por 6561 y da 65.610.000; divide por $2855\,{}^{15}/_{16}$ y da $22.973\,{}^{4218}/_{9139}$. La raíz de la raíz de esta cifra es *ac*. Ahora, en cuanto a la base *ab*, que es 16, elévala al cuadrado del cuadrado y da 65.536, que multiplicado por 10.000 da 655.360.000; divide por $2855\,{}^{15}/_{16}$ y resulta raíz de la raíz de $2.219.538\,{}^{4218}/_{9139}$ que es *ab*; con respecto a *bc* que es, 12, elévalo al cuadrado del cuadrado y da 20.736; multiplica por 10.000 y da 207.360.000; divide por $2855\,{}^{15}/_{16}$ y resulta raíz de la raíz de $72.606\,{}^{5766}/_{9139}$, que es *bc*.

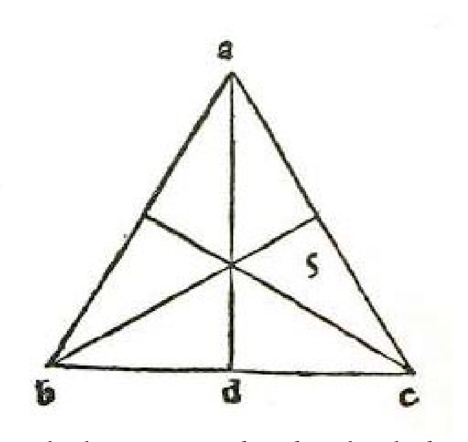
Esto puede hacerse con el álgebra: supón que un lado sea 9 *cosas*, el otro 12 y el tercero 16 *cosas*; multiplica 16 *cosas* por sí mismas y da 256 *censos*; multiplica también 9 *cosas* por sí

mismas y da 81 *censos*; suma ambas cifras y da 337 *censos*; luego multiplica 12 *cosas* por sí mismas y da 144 *censos*; resta de 337 *censos* y queda 193 *censos*; divide por el doble de la base, que da 32 *cosas*, y resulta 6 $^{1}/_{32}$ *cosas*; multiplica esto por sí mismo y da 36 $^{385}/_{1024}$ *censos*; luego multiplica 9 *cosas* por sí mismas y da 81 *censos*; resta 36 $^{385}/_{1024}$ y queda 44 $^{639}/_{1024}$ *censos*.

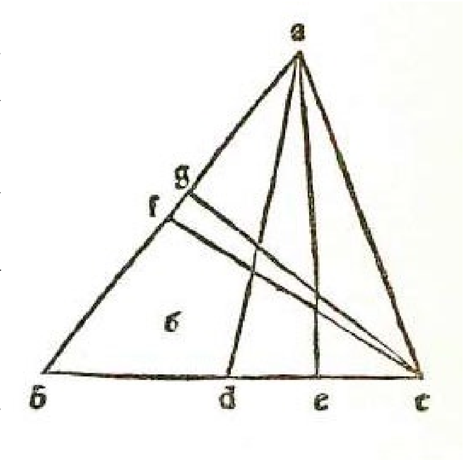
El cateto es raíz de 44 $^{639}/_{1024}$ *censos*; multiplica eso por la mitad de la base, que es 8 *cosas*, elevada al cuadrado, es decir por 64 *censos*, y 64 *censos* por 44 $^{639}/_{1024}$ *censos* da 28.552 $^{15}/_{16}$ *censos de censo* que es igual al número, 100. Eleva al cuadrado tal número y da 10.000; reduce a dieciseisavos y tendrás 160.000, número que debes dividir por 45.695; y da 3 $^{22915}/_{45695}$; su raíz corresponde a la *cosa*. Ahora bien, nosotros dijimos que *ac* era 9 *cosas*; eleva al cuadrado del cuadrado y da 6561; multiplica por 3 $^{22915}/_{45695}$ y da raíz de la raíz de 22.973 $^{8765}/_{45695}$, que es *ac*. Por otra parte, *bc* lo supusimos igual a 12 *cosas*; elévalo al cuadrado del cuadrado y da 20.736; multiplica dicha cifra por 3 $^{22915}/_{45695}$ y da 72.606 $^{5766}/_{9139}$. La raíz de la raíz de esta cifra es *bc*. Asimismo, supusimos *ab* igual a 16; eleva al cuadrado del cuadrado y da 65.536; multiplica por 3 $^{22915}/_{45695}$ y da raíz de la raíz de 229.538 $^{4218}/_{9139}$, que es *ab*.

CASO 5. *Siendo 8 la distancia entre el centro de un triángulo dado y cada ángulo, hallar la superficie y sus lados*. Debes saber que en todo triángulo equilátero la distancia desde el centro a cada uno de sus ángulos es igual a $^{2}/_{3}$ del diámetro o cateto. Ahora bien, si la distancia desde el centro a cualquier ángulo es 8, correspondiendo a $^{2}/_{3}$ del cateto, será todo el cateto igual a 12. Multiplica 12 por sí mismo y da 144. Tú sabes que en todo triángulo equilátero la potencia del cateto es sesquitercia con respecto a la potencia del lado del triángulo; por tanto toma la tercera parte de 144, es decir 48, y agrégala a 144, lo que da 192. La raíz de 192 es igual a cada uno de los lados del triángulo

dado. Allora bien, para saber su superficie, toma la mitad de la base, es decir, de raíz de 192; al cuadrado será 48; multiplica 48 por 144 y da 6912. La raíz de 6912 será la superficie del triángulo. Y esto es lo propuesto.



CASO 6. *En el triángulo* abc, *siendo* ab *igual a 15*, bc *a 14 y* ac *a 13, y tirando desde cada ángulo líneas que dividen los lados opuestos en partes iguales y se intersecan en el punto* g, *hallar la cantidad de las líneas entre* g *y cada uno de los ángulos.* Tírense, ante todo, desde los ángulos las líneas que dividen en partes iguales los lados. La línea que parte del ángulo *a* divide *bc* en el punto *d*, la que parte del ángulo *b* divide *ac* en el punto *e*, y la que parte del ángulo *c* divide *ab* en el punto *f*. Ahora hay que hallar los catetos: primero, el que parte del ángulo *a* y cae sobre *bc*; tal cateto será igual a raíz de 144, y cae a una distancia de 5 desde *c*; luego halla la diferencia entre la mitad de *bc*, que es 7, y 5; da 2; multiplica esta cifra por sí misma y da 4; agrégala a 144 y da 148. La raíz de 148 es *ad*. Ahora toma el cateto que parte del ángulo *b* y cae sobre *ac*, que es 13. Tal cateto es raíz de 167 $\frac{1}{169}$ y cae a una distancia de *c* igual a 5 $\frac{5}{13}$. Calcula cuanto da la diferencia de *ce* que es 6 $\frac{1}{2}$ y 5 $\frac{5}{13}$; da 1 $\frac{3}{26}$; multiplica por sí mismo y da 1 $\frac{165}{676}$; agrega al cateto que es raíz de 167 $\frac{1}{169}$ y da [raíz de] 168 $\frac{1}{4}$; tal cantidad es por



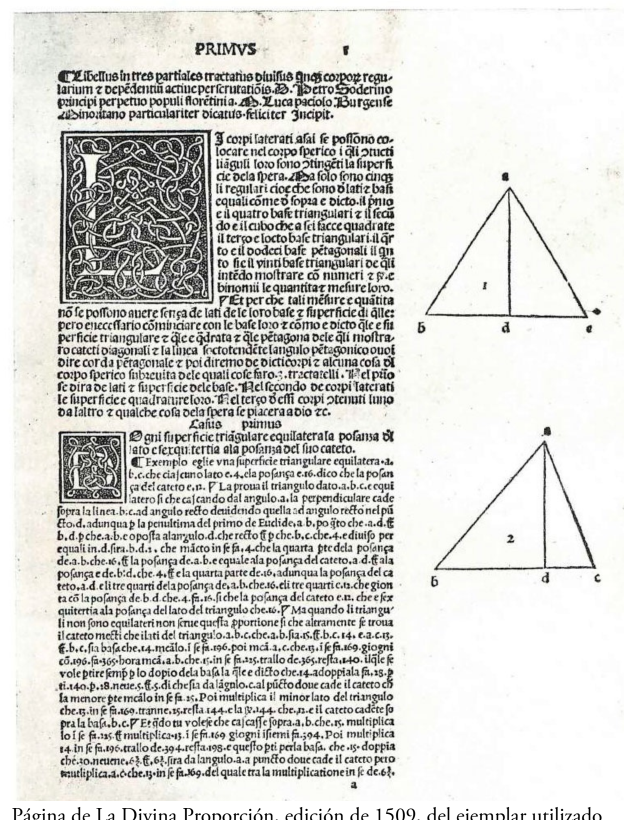
tanto la de *be*. El cateto que parte del ángulo *c* y cae sobre *ab* es igual a raíz de 125 $^{11}/_{25}$, y cae a una distancia de *b* igual a 6 $^{3}/_{5}$; calcula la diferencia entre *bf*, que es 7 $^{1}/_{2}$, y 6 $^{3}/_{5}$ y da $^{9}/_{10}$; multiplica esto por sí mismo y da $^{81}/_{100}$; agrega a 125 $^{11}/_{25}$ y da 126 $^{1}/_{4}$. La raíz de 126 $^{1}/_{4}$ es *cf*. Tienes así que *ad* es raíz de 148, *be* raíz de 168 $^{1}/_{4}$ y *cf* raíz de 126 $^{1}/_{4}$. Lo que tú deseas saber es dónde se intersecan tales líneas. Ahora bien, como en todo triángulo las líneas que salen de sus ángulos y dividen los lados opuestos en partes iguales se intersecan a una distancia equivalente a $^{2}/_{3}$, teniendo la línea *ad*, que es igual a raíz de 148, si deseas conocer *ag*, que es igual a $^{2}/_{3}$ de dicha línea, eleva a cuadrado 3 y da 9; divide 148 por 9, y da 16 $^{4}/_{9}$ multiplica por dos al cuadrado y da 65 $^{7}/_{9}$. La raíz de 65 $^{7}/_{9}$ es *ag*; entonces *gd* es igual a raíz de 16 $^{4}/_{9}$. Por otra parte, tienes que *be* es igual a raíz de 168 $^{1}/_{4}$; de esta cantidad se toma $^{1}/_{3}$; es decir, eleva a cuadrado 3 y da 9; divide 168 $^{1}/_{4}$ por 9 y da 18 $^{25}/_{36}$; multiplica esto por 2 al cuadrado y da 74 $^{28}/_{36}$. La raíz de 74 $^{28}/_{36}$ es la línea *bg* y *ge* será la raíz de 18 $^{25}/_{36}$. Por fin, tienes que *cf* es igual a raíz de 126 $^{1}/_{4}$; y tú deseas conocer *cg*; toma entonces $^{2}/_{3}$ de la raíz de 126 $^{625}/_{2500}$. Para ello eleva al cuadrado 3 y da 9; divide 126 $^{625}/_{2500}$ por 9 y da 14 14 $^{1}/_{36}$; multiplica esto por 2 al cuadrado y da 56 $^{1}/_{9}$. La raíz de esta cifra es *cg*; *gf* será raíz de 14 $^{1}/_{36}$. Resumiendo, tienes que *ag* es igual a raíz de 65 $^{7}/_{9}$, *dg* a raíz de 16 $^{4}/_{9}$, *bg* a raíz de 74 $^{28}/_{36}$, *ge* a raíz de 18 $^{25}/_{36}$, *cg* a raíz de 56 $^{1}/_{9}$ y *gf* a raíz de 14 $^{1}/_{36}$.

❧ Creo conveniente hablar, además, de la división de tales triángulos para conocer la cantidad de la línea que los divide y las partes de la superficie dividida.

CASO 7. *En todo triángulo la proporción entre la potencia de la base y toda la superficie del triángulo es igual a la proporción entre la potencia de la línea divisoria y la parte de la superficie dividida, siendo dicha línea equidistante de la base*. ❧ Ejemplo: sea el triángulo *abc*, siendo *ab* igual a 15, *bc* a 14, *ac* a 14, *ca* a 13 y el cateto *ad* a 12. Elijo tal triángulo porque los lados y el cateto corresponden a números enteros y la superficie es igual a 84.

Tira una línea equidistante de *bc* que es la base; sea dicha línea *fg* y divida el cateto *ad en* partes iguales en el punto *h*. Ahora, como entre *ad*, que es 12, y *bc*, que es 14, hay la misma proporción que entre *ah*, que es la mitad del cateto, es decir 6, y entre *fg*, será entonces *fg* igual a 7. Si multiplicas por sí mismo *bc*, que es 14, da 196. La superficie del triángulo *abc* es 84. Ahora bien, multiplica por sí mismo *fg*, que es 7, y da 49; digo que tienes así el otro triángulo *afg*, y el cateto *ah* será igual a 6 y la base *fg* a 7. Tú sabes que, multiplicando el cateto por la base, se obtiene la superficie de dos triángulos; multiplica entonces el cateto, que es 6, por la mitad de la base, que es 3 ½ y da 21. Digo que la proporción entre la potencia de la línea divisoria, que es 49, y la superficie que le corresponde, que es 21, es la misma que entre la potencia de *bc*, que es 196, y la superficie de todo el triángulo, que es 84. Por eso si dices: "196 me da 84; ¿qué me dará 49?", multiplica 49 por 84 y da 4116; divide por 196 y da 21, que es lo que buscábamos. De manera que en todo triángulo la proporción entre la potencia de la base y la superficie es igual a la de la potencia de la línea divisoria con

respecto a la parte correspondiente de la superficie de dicho triángulo. Y esto es lo que nos proponíamos.


PRIMVS a

Libellus in tres partiales tractatus diuisus quinque corporum regularium et depedentium actiue perscrutationis. D. Petro Soderino principi perpetuo populi florentini a. M. Luca paciolo Burgense Minoritano particulariter dicatus. feliciter Incipit.

I corpi laterati asai se possono collocare nel corpo sperico i quali contucti li anguli loro sono contingenti la superficie dela spera. Ma solo sono cinque li regulari cioe che sono de lati et basi equali comme de sopra e dicto. il primo e il quatro base triangulari et il secundo e il cubo che a sei facce quadrate il terço e locto base triangulari. il quarto e il dodeci base pentagonali il quinto sie il vinti base triangulari de quali intendo mostrare con numeri et R. e binomii le quantita et mesure loro. Et per che tali mesure e quantita non se possono auere sença de lati de le loro base et superficie di quelle: pero e necessario comminciare con le base loro et commo e dicto quale e superficie triangulare et quale e quadrata et quale pentagona dele quali mostraro cateti diagonali et la linea soctotendente langulo pentagonico ouoi dire corda pentagonale et poi diremo de dicti corpi et alcuna cosa del corpo sperico subseguita dele quali cose faro. 3. tractatelli. Nel primo se dira de lati et superficie dele base. Nel secondo de corpi laterati le superficie e quadrature loro. Nel terço de essi corpi contenuti luno da laltro et qualche cosa dela spera se piacera a dio etc.

Casus primus

Ogni superficie triangulare equilatera la posanza del lato e sexquitertia ala posanza del suo cateto.

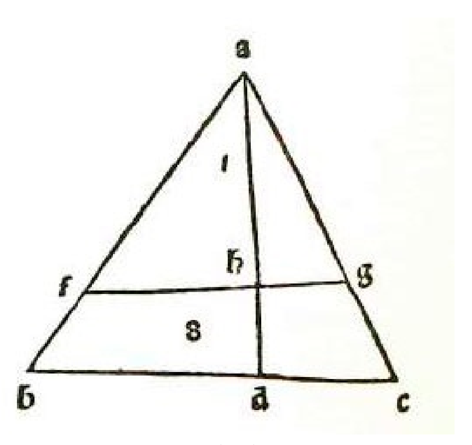
Exemplo eglie vna superficie triangulare equilatera. a. b. c. che ciascuno lato e. 4. e la posança e. 16. dico che la posança del cateto e. 12. La proua il triangulo dato. a. b. c. e equilatero si che cascando dal angulo. a. la perpendiculare cade sopra la linea. b. c. ad angulo recto deuidendo quella ad angulo recto nel puncto. d. adunqua per la penultima del primo de Euclide. a. b. po quanto che. a. d. et b. d. per che. a. b. e oposta alangulo. d. che recto et per che. b. c. che. 4. e diuiso per equali in. d. sira. b. d. 2. che macto in se fa. 4. che la quarta parte dela posança de. a. b. che. 16. et la posança de. a. b. e equale ala posança del cateto. a. d. et ala posança e de. b. d. che. 4. et e la quarta parte de. 16. adunqua la posança del cateto. a. d. e li tre quarti dela posança de. a. b. che. 16. e li tre quarti e. 12. che gionta con la posança de. b. d. che. 4. fa. 16. si che la posança del cateto e. 12. che e sexquitertia ala posança del lato del triangulo che. 16. Ma quando li trianguli non sono equilateri non serue questa proportione si che altramente se troua il cateto mecti che i lati del triangulo. a. b. c. che. a. b. sia. 15. et. b. c. 14. e. a. c. 13. et. b. c. sia basa che. 14. mcalo. i se fa. 196. poi mca. a. c. che. 13. i se fa. 169. giogni con. 196. fa. 365. hora mca. a. b. che. 15. in se fa. 225. trallo de. 365. resta. 140. il quale se vole partire sempre per lo dopio dela basa la quale e dicto che. 14. adoppiala fa. 28. parti. 140. per. 28. neue. 5. et. 5. di che sia da langulo. c. al puncto doue cade il cateto cioe la menore parte mcalo in se fa. 25. Poi multiplica il minor lato del triangulo che. 13. in se fa. 169. tranne. 25. resta. 144. e la R. 144. che. 12. e il cateto cadente sopra la basa. b. c. Et quando tu volese che cascasse sopra. a. b. che. 15. multiplica lo i se fa. 225. et multiplica. 13. i se fa. 169. giogni insiemi fa. 394. Poi multiplica 14. in se fa. 196. trallo de. 394. resta. 198. e questo parti per la basa. che. 15. doppia che. 30. neuene. 6 3/5. et. 6 3/5. sira da langulo. a. a puncto doue cade il cateto pero multiplica. a. c. che. 13. in se fa. 169. del quale tra la multiplicatione in se de. 6 3/5.

a

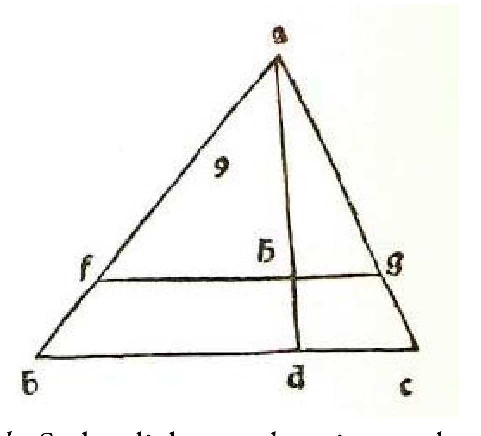
Página de La Divina Proporción, edición de 1509, del ejemplar utilizado para preparar la edición presente.

CASO 8. *Dado el triángulo* abc *cuyo lado* ab *es 15*, bc *14,* ac *13, el cateto* ad *12, y la superficie 84, si una línea equidistante de* bc *quita a la superficie una parte igual a 42, hallar la cantidad de dicha línea*. ℞ Por la regla precedente, tienes que entre la superficie del triángulo y la potencia de la base hay la misma proporción que entre la superficie que quita la línea equidistante y la potencia de dicha línea. Tú quieres saber cuánto es la línea que separa la mitad de 84, es decir 42. Ahora bien, si toda la superficie del triángulo que es 84 da como potencia de la base 196, ¿qué dará 42 de superficie? Multiplica entonces 42 por 196

y da 8232; divide esta cifra por 84 y da 98. La raíz de 98 será la línea divisoria *fg*. Ahora, si quieres *ah* que es el cateto que cae sobre *fg*, multiplica por sí mismo el cateto *ad*, que es 12, y da 144; toma la mitad y da 72. La raíz de 72 es *ah*, la que multiplicada por ½ de [raíz de] [103] de 98, que es [raíz de] 24 ½, da raíz de 1764, que es 42. Di entonces que la línea que corta la mitad de la superficie del triángulo y que es *fg* es igual a raíz de 98, y que *a h*, el cateto que cae sobre *fg*, es igual a raíz de 72.



CASO 9. *Si en el triángulo* abc *cuyo lado* ab *es igual a 15,* bc *a 14*, ac *a 13 y cuyo cateto* ad *es 12, siendo su superficie 84, una línea equidistante de* bc *separa de dicha superficie una parte igual a 35, hallar la cantidad de la línea divisoria*. ℜ Toma como línea divisoria *fg*, habrá así dos triángulos *abc* y *afc*. El cateto *ad* divide *fg* en el punto *h*. Se ha dicho, en la primera de las divisiones de los triángulos, que la proporción entre la potencia de la base y la superficie del triángulo es igual a la de la potencia de la línea divisoria y la superficie que separa. En forma semejante la proporción entre la potencia de la base y la potencia de la línea divisoria es igual a la de la superficie *abc* que es 84 con respecto a la superficie del triángulo *afg* que es 35. Di entonces: "si 84 me da 35, ¿qué me dará 196?". Multiplica 35 por 196 y da 6860; divide por 84 y da 81 $^{14}/_{21}$ La raíz de 81 $^{14}/_{21}$ es la línea divisoria *fg*.



CASO 10. *Si en el triángulo* abc *cuyo lado* ab *es igual a 15*, bc *a 14*, ac *a 13 y cuyo cateto* ad *es igual a 12, siendo su superficie 84, una línea equidistante con respecto a* bc *separa* $\frac{2}{5}$ *de la superficie, hallar dónde corta el cateto*. Cuando el triángulo es dividido por una línea equidistante de la base, se obtienen dos triángulos semejantes. Entonces, si en el triángulo *abc* se tira una línea equidistante de *bc*, siendo dicha línea *fg*, tendremos un triángulo que será *afg*, semejante al triángulo *abc*. Ahora, los triángulos semejantes están en proporción tal que la proporción entre cateto *ad* y el lado del triángulo correspondiente, *ab*, es igual a la proporción entre el cateto *ah* y el lado del triángulo correspondiente, *af*. De tal suerte, *ad* es a *ac* como *ah* es a *ag*; de la misma manera *ad* es a *bc* como *ah* es a *fg*. Ahora bien, como están en proporción, la proporción entre $\frac{2}{5}$ de la potencia del cateto y $\frac{2}{5}$ de la superficie del triángulo equivale a la de la potencia de todo [el cateto] y la superficie de todo el triángulo. Multiplica entonces por sí mismo el cateto, que es 12, y da 144; toma de él $\frac{2}{5}$, es decir 57 $\frac{3}{5}$. La raíz de esta cifra es el cateo *ah* del triángulo *afg* y su superficie es 33 $\frac{3}{5}$ es decir $\frac{2}{5}$ de 84, que es la superficie del triángulo *abc*.

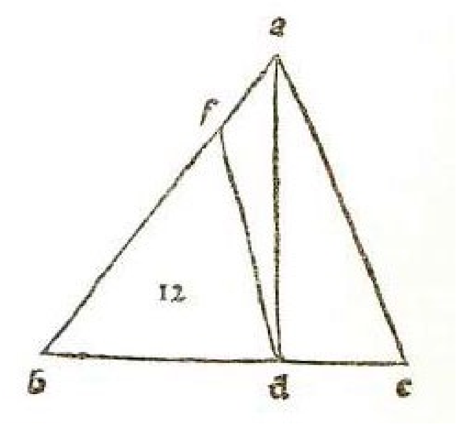
Puedes proceder también de otra manera: como están en proporción, tú sabes que la superficie del triángulo *afg*, es $\frac{2}{5}$ de 84 es decir, 33 $\frac{3}{5}$. En efecto, sabiendo que 84 de superficie da como potencia del cateto 144, ¿qué te dará 33 $\frac{3}{5}$ de superficie? Multiplica 33 $\frac{3}{5}$ por 144 y da 4838 $\frac{2}{5}$; divide por 84 y da 57 $\frac{3}{5}$. La raíz de 57 $\frac{3}{5}$ es el cateto *ah*. Y esto es lo que queríamos hallar.

CASO 11. *Dado el triángulo* abc *cuyo lado* ab *es igual a 15*, bc *a 14 y* ac *a 13, y cuyo cateto* ad *es igual a 12, siendo su superficie 84 y estando dividido por una línea igual a 8, equidistante de* bc, *se quiere hallar dónde corta el cateto* ad, *que es igual a 12 y la superficie que separa del triángulo* abc. Puesto que, según dijimos, se obtienen dos triángulos semejantes, es decir *abc* y

afg, que están en una determinada proporción, di así: "si *bc*, que es 14, da como cateto *ad*, que es 12, ¿qué dará la base *fg*, que es 8?". Multiplica 8 por 12 y da 96; divide por 14 y da $6\ ^{6}/_{7}$. Dicha línea entonces cortará el cateto en el punto *h*, que se encontrará [a una distancia de] $6\ ^{6}/_{7}$ de *a* siendo *ah* cateto del triángulo *afg*.

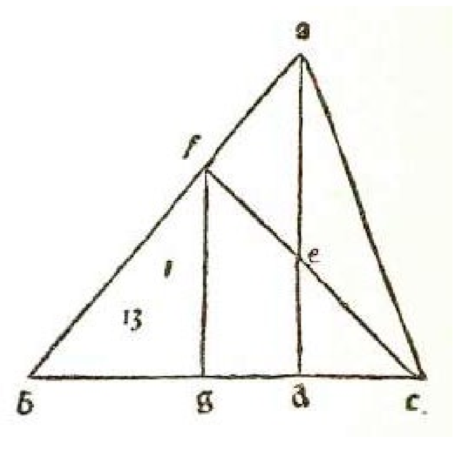
Si quieres conocer la superficie que separa, multiplica el cateto por la mitad de la base, que es 4; de manera que 4 por $6\ ^{6}/_{7}$ da $^{3}/_{7}$; esto es lo que separa de la superficie del triángulo *abc*, que es 84. Ahora bien, en el caso que quisieras dividirlo con una línea que salga de un ángulo, divide la base opuesta a dicho ángulo en la parte en que quieres dividirlo y tira desde el ángulo la línea. Y ya está.

CASO 12. *Sea dado el triángulo* abc *cuyo lado* ab *es 15,* bc *14,* ca *13, el cateto* ad *12 y la superficie 84. En dicho triángulo hay un punto* e *en la línea* ab*, a una distancia de 3 desde el ángulo* a*, desde el cual trazo la línea que divide* bc *en el punto* f *y que separa la mitad de la superficie del triángulo. Hallar la cantidad de* ef *y de* bf. Tú tienes dos triángulos *abc y bef*. Y toma *ab* igual a 15, y el cateto *a d* igual a 12 y *be* igual a 12, pues si restas 3 de 15, que es *ab*, queda 12. Por tanto di así: si *ab*, que es 15, me da como cateto 12, ¿qué me dará *be* que es 12? Multiplica 12 por 12 y da 144; divide por 15 y da $9\ ^{3}/_{5}$; divide por esta cifra la mitad de 84, que es 42, y da $4\ ^{3}/_{8}$; duplica y dará 8 e/4. Esto es *bf*. Ahora, para saber cuánto es *ef*, multiplica por sí mismo $9\ ^{3}/_{5}$, que es el cateto, y dará $92\ ^{4}/_{25}$; luego multiplica por sí mismo *be*, que es 12, y da 144; réstale $92\ ^{4}/_{25}$ y queda $51\ ^{21}/_{25}$. Su raíz es la línea que va



desde *b* hasta donde cae el cateto, que es 7 $\frac{1}{5}$, réstalo de 8 $\frac{3}{4}$ y queda l $\frac{11}{20}$; multiplica esto por sí mismo y da 2 $\frac{101}{400}$; agrega 92 $\frac{4}{25}$ y da 94 $\frac{2244}{10000}$. La raíz de 94 $\frac{2244}{10000}$ *es ef* y *bf es* igual a 8 $\frac{3}{4}$.

CASO 13. *Si el triángulo* abc, *cuyo lado* ab *es 15*, bc *14 y* ac *13, está dividido por una línea que parte del ángulo* c *y corta el cateto* ad *en el punto* e, *y* ab *en el punto* f, *siendo* a f *igual a 5, hallar dicha línea y además* ae, de *y* ef. ❧ Tú sabes que el cateto *ad* es 12 y que cae sobre la base *bc* en el punto *d*; sabes también que *bd* es 9 y que *dc* es 5. Se ha dicho también que la línea que parte del ángulo *c* va al punto *f* y divide *ab*, que es 15, a una distancia de 5 desde el ángulo *a*, vale decir a $\frac{1}{3}$ de la línea *ab*. Luego si se tira una línea desde el punto f, equidistante de *ad*, cortará *bd* en un punto *g* tal que *dg* será $\frac{1}{3}$ de la línea *bd*. Como la perpendicular equidistante de *ad* y que baja del punto *f*, divide *ab* y *bd* en una determinada proporción, y *af* es $\frac{1}{3}$ de *ab*, entonces *dg* será $\frac{1}{3}$ de *bd*; y, como *bd es* igual a 9, *dg* es 3 y *bg* 6. Tú tienes que *bf es* 10, que es $\frac{2}{3}$ de *ab*, que es 15; multiplica por sí mismo 10 y da 100; ahora, multiplica por sí mismo *bg*, que es 6, y da 36; réstalo de 100 y queda 64. La raíz de 64, que es 8, es *fg*. Se ha dicho, además, que *cd* es 5 y *dg* 3; súmalos y dan 8, multiplica esta cifra por sí misma y da 64; y multiplica por sí mismo *fg*, que es también 8, y da también 64; suma esta cifra a 64 y da 128. La raíz de 128 es *fc*. Ahora como *fc* es opuesta al ángulo *g*, que es recto, su potencia es igual a la suma de las potencias de las dos líneas *fg y gc* por la penúltima del primero de EUCLIDES. Si por otra parte quieres saber la [cantidad de] *de*, di: “si *cg*, que



es 8 me da *fg*, que es 8, ¿qué me dará *cd*, que es 5?". Multiplica 5 por 8 y da 40; divide por 8 y resulta 5. Esta cifra es *de*; y *ae* es el resto hasta llegar a 12, vale decir 7. Ahora, para *ce* procede así: multiplica por sí mismo *cd*, que es 5, y da 25. También es 5; multiplícalo por sí mismo y da 25; agrega esta cifra a 25 y da 50. La raíz de 50 es *ce*. Ahora, como tú sabes que fg es 8 y *de* 5, resta 5 de 8 y queda 3; multiplica esta cifra por sí misma y da 9; también *dg* es 3, que multiplicado por sí mismo da también 9, que sumado a 9 da 18. La raíz de 18 es *ef*, es decir, lo que buscábamos.

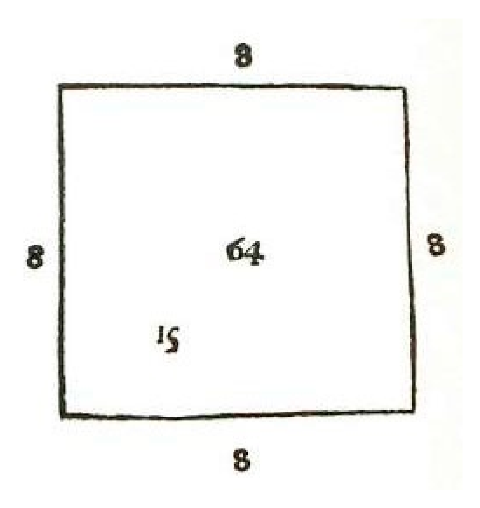
En una superficie cuadrilátera de lados y ángulos iguales la potencia de su diámetro es el doble de la potencia de su lado y su superficie se obtiene multiplicando el lado por sí mismo.

Verbi gratia; sea un cuadrado cuyo lado es igual a 4. Multiplica 4 por 4 y da 16. Esta cantidad, es decir, 16, es la superficie de tal cuadrado. Esto vale para todo cuadrilátero de lado y ángulos iguales.

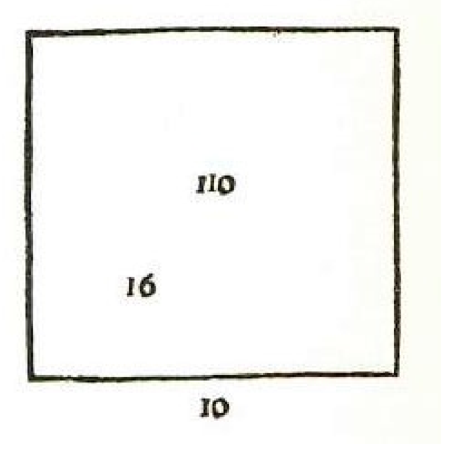
CASO 14. *Hallar la cantidad del diámetro de un cuadrado cuyo lado sea igual a* 6. Sea cuadrado *abcd*, y sea cada uno de sus lados igual a 6. En dicho cuadrado traza una línea desde el ángulo *a* al ángulo *c*; dicha línea divide el cuadrado en dos partes, formando dos triángulos *abc* y *adc*, que son semejantes e iguales porque *ab* es igual a *ad* y *bc* a *dc* y *ac es* base de uno y del otro, de manera que son iguales. Ahora bien, por la penúltima del primero de EUCLIDES, tienes que la potencia de la linca del triángulo opuesta al ángulo recto es igual a la suma de las potencias de las líneas que contienen dicho ángulo recto la línea *a c*, entonces, que es diámetro del cuadrado *abcd*, cada uno de cuyos lados es igual a 6, y contienen dos de ellos el ángulo recto opuesto al diámetro *ac*, [será igual, en la potencia, a dos veces la potencia de un lado][104]. Por lo tanto, multiplica 6 por sí mismo [y, por separado,] dos veces; suma los resultados y da 72. La raíz de 72 es el diámetro *ac*. Ahora bien, si el diámetro del cuadrado fuera 8, ¿cuál sería su lado? Multiplica 8 por sí mismo y da 64; toma la mitad, que es 32, y la raíz de 32 será el lado de dicho cuadrado.

CASO 15. *Hallar el lado de un cuadrado cuya superficie es igual a dos veces la suma de sus cuatro lados*. Tú tienes en el álgebra que el cuadrado se entiende como *censo* y su lado se entiende

como raíz, es decir *cosa*; por lo tanto di así: “sea un *censo* igual a 8 *cosas*, por ser igual al doble de 4 *cosas*, es decir, 8 *cosas*. Ahora bien, la regla dice que debes dividir las *cosas* por los *censos* y lo que resulta es la *cosa*. Divide 8 por 1 y da 8; tal cantidad vale la *cosa* que representa a un lado, que de esta manera es igual a 8; multiplica por sí mismo 8 y da 64; la suma de sus cuatro lados, iguales cada uno a 8, da 32, y el cuadrado [de un lado] da 64, que es igual al doble de 32, cantidad que representa la suma de sus cuatro lados, tal como habíamos establecido”.

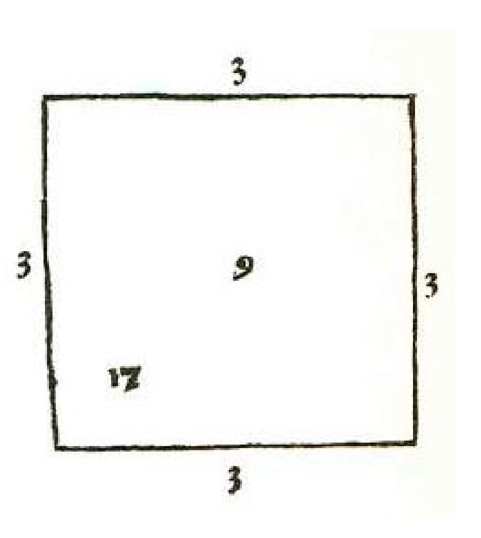


CASO 16. *Dado un cuadrado cuya superficie es igual a la suma de sus cuatro lados más 60, hallar su lado.* Di que tal cuadrado es 1 *censo* y que su lado es 1 *cosa*; cuatro lados, por tanto, serán 4 *cosas*. Entonces un *censo* es igual a cuatro *cosas* más 60. La regla dice que cuando los *censos* son iguales a las *cosas* más un número, debes dividir por 2 las *cosas*, multiplicarlas por sí mismas y el resultado agregarlo al número. La raíz de la suma más [el resultado de] la división de las *cosas* será igual a la *cosa*. Entonces tienes que un *censo* es igual a 4 *cosas* más el número 60; divide por 2 las *cosas* y da 2; multiplica esto por sí mismo y da 4; agrega 60 y da 64. La raíz de 64 más 2, que es [el resultado de] la división de las *cosas*,



es la *cosa* que supusimos que era un lado del cuadrado. La raíz de 64 es 8; agrega 2, que es la mitad de las *cosas*, y da 10, que es uno de los lados; éste multiplicado por sí mismo da 100; la suma de sus lados es igual a cuatro veces 10, lo que da 40, que sumado a 60 da 100, que es lo que queríamos.

CASO 17. *Si la superficie de un cuadrado se resta de sus cuatro lados y queda 3, hallar cuál es su lado*. Como se ha dicho, el cuadrado es 1 *censo* y el lado es 1 *cosa*; cuatro lados son 4 *cosas*. Entonces 4 *cosas* son iguales a 1 *censo* más el número 3. Ahora bien, la regla dice que si el *censo* y el número son iguales a las *cosas* hay que dividir por 2 las *cosas*, multiplicarlas por sí mismas y restar el número. La raíz del resto más [el resultado de] la división de las *cosas* será la *cosa*. Tú tienes que 4 *cosas* son iguales a 1 *censo* más el número 3. Divide [por 2] las *cosas* y da 2; multiplica esto por sí mismo y da 4; resta el número que es 3 y queda 1. La raíz de 1 más 2, que es [el resultado de] la división de las *cosas*, es la *cosa* que supusimos que era el lado, vale decir 3. Multiplícalo por sí mismo y da 9; resta los cuatro lados que suman 12, vale decir, cuatro veces 3, y queda 3, que es lo que buscábamos.



CASO 18. *Si cuatro lados de un cuadrado equilátero son iguales a 2/9 de su superficie, hallar la cantidad de los lados*. Tú tienes que 2/9 de *censo* es igual a cuatro *cosas*; reduce a 1 *censo* y tendrás que 1 *censo* es igual a 18 *cosas*; divide 18 *cosas* por 1 y da 18, que es la *cosa* correspondiente a un lado del cuadrado; multiplica esto por sí mismo y da 324. Los 2/9 de 324 equivalen a 72, es

decir a los cuatro lados, pues, siendo cada lado igual a 18, multiplica 4 por 18 y da 72, que es 2/9 de 324.

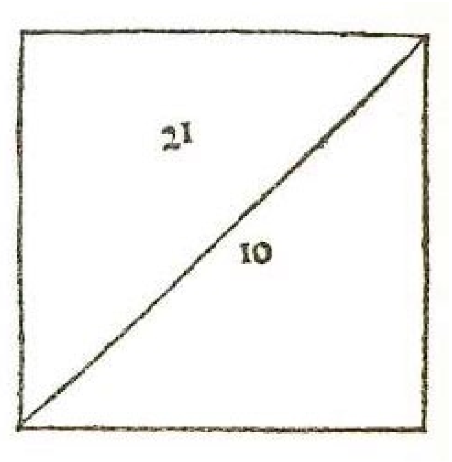
CASO 19. *Hallar el lado del cuadrado cuyo diámetro es 6 más el lado*. Supon que su lado sea 1 *cosa*; multiplica 1 *cosa* por 1 *cosa* y da 1 *censo*; duplica y da 2 *censos*. Luego dirás que el diámetro es 1 *cosa* más 6; multiplica 1 *cosa* más 6 por 1 *cosa* más 6 y da 1 *censo* y 12 *cosas* más 36; esto último es igual a 2 *censos*. Simplifica, quitando de ambas partes 1 *censo* y tendrás que 1 *censo* es igual a 12 *cosas* más 36.

Divide por mitad las *cosas* y serán 6; multiplica 6 por sí mismo y da 36; agrega el número, que es 36, y da 72. La raíz de 72 más 6, que es [el resultado de] la división de las *cosas*, es igual a la *cosa* que supusimos que era un lado, vale decir, 6 más raíz de 72. El diámetro es 12 más raíz de 72.

CASO 20. *Si se multiplica el diámetro por el lado de un cuadrado y residía raíz de 32, hallar cuál es su lado y su diámetro*. Tú sabes que la potencia del diámetro es igual a la suma de las potencias de dos lados; luego supon que un lado sea 1 *cosa*; multiplícalo por sí mismo y da 1 *censo*; duplica y da 2 *censos*. La raíz de 2 *censos* es el diámetro. Tú debes multiplicar raíz de 2 *censos* por un lado, que es 1 *cosa*; eleva el lado al cuadrado y da 1 *censo*, multiplica 1 *censo* por 2 *censos* y da 2 *censos de censo*; esto es igual a 32; reduce a 1 *censo de censo* y tendrás que 1 *censo de censo* es igual a 16. Así, pues, raíz de raíz de 16 es igual a la *cosa*. Ahora bien, dijimos que un lado era 1 *cosa*; y raíz de raíz de 16 es igual a 2; multiplica por sí misma esta cifra y da 4; duplica y da 8. Luego, el diámetro es raíz de 8; eleva al cuadrado 2 y da 4; multiplica 4 por 8 y da 32; de ahí tenemos raíz de 32 según establecimos.

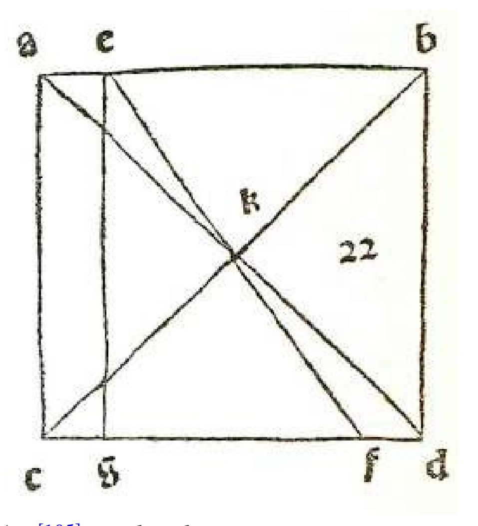
CASO 21. *Si la superficie de un cuadrado multiplicada por su diametro da 500, ¿cuál es su lado y su diámetro?* Supon que el lado sea 1 *cosa*; multiplícalo por sí mismo y da 1 *censo*. La

potencia del diámetro es doble, luego será 2 *censos*. Ahora bien, dijimos que multiplicando la superficie del cuadrado por el diámetro da 500; elévala al cuadrado y da 1 *censo de censo*; multiplica 1 *censo de censo* por 2 *censos* y da 2 *censos de cubo*. Tú tienes que 2 *censos de cubo* es igual a[l cuadrado de] 500; eleva al cuadrado y dará 250.000; reduce a 1 *censo de cubo* y tendrás que 1 *censo de cubo* es igual a 125.000 y la raíz de la raíz cúbica es igual a la *cosa*, que es un lado, es decir, raíz de 50, que es lado del cuadrado: duplica tal número y da 100; su raíz es 10, que es el diámetro; multiplica 10 por la superficie, que es 50, y da 500, y de esta manera tienes que el lado del cuadrado es raíz de 50 y su diámetro 10.



Ahora que hemos hablado de los lados, diámetros y superficies de los cuadrados, diré, además, algo de sus divisiones hechas por líneas rectas.

CASO 22. *Dada la superficie cuadrada* abcd *que es igual a 36, la cual está dividida en partes iguales por la línea* ef *que parte desde la línea* ab *junto al ángulo* a, *[hay que] hallar la cantidad de la línea divisoria y cuánto dista del ángulo* c *y del ángulo* d. Tú tienes que en el cuadrado *abcd* el lado es igual a 6. Queremos dividirlo en dos partes iguales por medio de una línea que parte de *e*, que dista 1 de *a*, en la línea *ab*. Sabes también que la superficie es 36. Ahora bien, divídase, primero, dicho cuadrado con las líneas diagonales[105] *a d* y *bc* que se intersecan en el punto *k*. Luego tira una línea desde el punto *e*, que pase por dicha línea dividirá *cd* en el punto *f*. Digo que la línea *f* divide la superficie *abcd* en partes iguales.



Como la proporción entre *cf* y *cd* es igual a la que hay entre *be* y *ba*; y como el triángulo *ebk* es igual y semejante al triángulo *ckf* y la línea *ad* divide en partes iguales el cuadrado y la línea *ef*, formando dos triángulos semejantes e iguales, *aek* y *dfk*, entonces, si quitamos del triángulo *acd* el triángulo *dfk*, queda *acfk* igual a *ebdk*; luego, si agregamos a *acfk* el triángulo *aek*, queda *aecf* igual a *ebdf*; cada uno es la mitad de la superficie *abcd*, cuyo lado es 6 y es igual a 1, como también es 1 *fd*.

Resta 1 de *cd*, que es 6, y queda 5, que es *cf*. Traza una línea desde el punto *e*, equidistante de *ac* y que divida *cf* en el punto *g* y será *cg* igual a 1. Resta esta cifra de *cf*, que es igual a 5, y queda 4. De tal suerte tú tienes un triángulo *efg*, cuyo cateto *ge* es igual a 6. Sabes también que multiplicando el cateto por la mitad de la base *gf*, es decir, por *2*, se obtiene la superficie del triángulo. Por tanto, multiplica 2 por 6 y da 12; a esta cifra agrega la superficie *aecg*, de la cual un lado es igual a 1 y otro a 6. Multiplica 1 por 6 y da 6; agrega 12 y da 18, que es la mitad de la superficie *abcd*, la cual es 36.

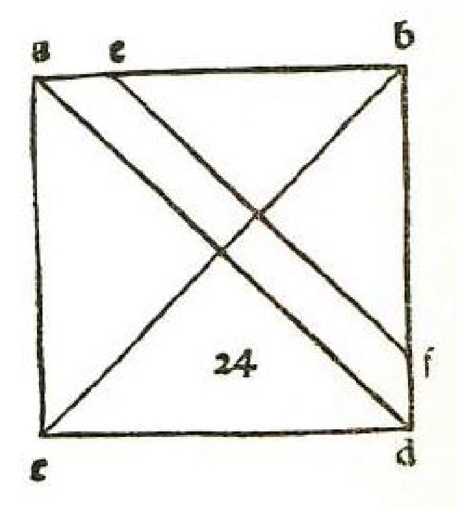
Ahora para conocer la línea *ef* multiplica por sí mismo *gf*, que es 4, y da 16; luego multiplica por sí mismo *eg*, que es 6, y da 36; agrega 16 y da 52. La raíz de 52 es *ef*. Ésta, como es opuesta al ángulo *g*, que es recto, tiene el cuadrado igual a la suma de los cuadrados de las dos líneas *eg* y *gf*, que contienen el ángulo recto opuesto a *ef*.

CASO 23. *Dado el cuadrado* abcd *cuyo lado es igual a 6, y una línea que parte del punto* e *en la línea* ab, *siendo* ae *igual a 1 y separando dicha dínea $\frac{1}{3}$ de la superficie, hallar cuál es la cantidad de la línea divisoria y en qué punto tocará* cd. Toma antes $\frac{1}{3}$ del lado *ab*, es decir *al*, y desde el punto *l* traza la línea equidistante de *ac*, que toque la línea *cd* en el punto *m*; desde el punto *c* traza *em*, y desde el punto *l* tira una línea equidistante de *em* que corte *cd* en el punto *f*; luego traza *ef*. Digo que la línea *ef* separa $\frac{1}{3}$ de la superficie de *abcd*. En efecto, la línea *ef* divide la línea *lm* en partes iguales en el punto formando dos triángulos semejantes e iguales que son *elk* y *fmk* se ha dicho que la línea *lm* quita $\frac{1}{3}$ de la superficie *abcd*; entonces *alcm* es $\frac{1}{3}$ de *abcd*, pues quitando el triángulo *elk* a *alcm* y agregándole el triángulo *fmk* que es igual al otro, quedará *aecf* igual a *alcm*, que es $\frac{1}{3}$, como se ha dicho.

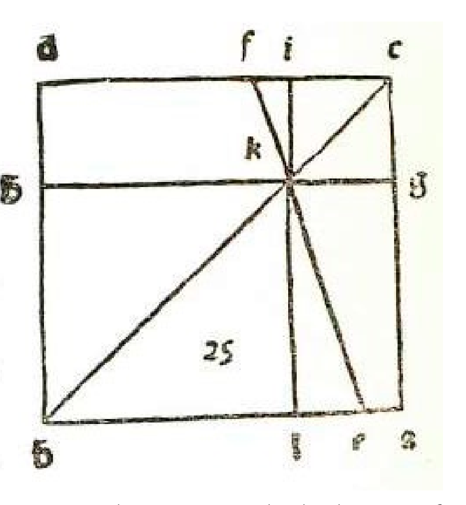
Ahora, si quieres conocer la línea *ef*, procede así: tú tienes

que *ae* es igual a 1, tira desde el punto *e* una línea equidistante de *ac*, y sea ésta *eh*; será entonces *ch* igual a 1. Ahora bien, *cf* es igual a 3; resta 1 y queda 2; multiplícalo por sí mismo y da 4; luego multiplica por sí mismo *eh*, que es 6, y da 36; agrega 4 y da 40. La raíz de 40 es *ef* que separa ⅓ de la superficie *abcd* y corta *cd* en el punto *f*. Por otra parte *cm* es igual a 2 y es igual a *al*, que es ⅓ de 6; *mf* es igual a *ae* y a *el*, cada uno igual a 1, agregando *cm*, que es 2, será *cf* igual a 3. De esta manera, la linea *ef* corta *cd* en el punto *f* y divide *cf* [en forma tal que *cf* es igual a] 3.

CASO 24. *Dado el cuadrado* abcd *cuyo lado es 6 y una línea equidistante de su diámetro* ad, *la cual separa ⅓ de su superficie, hallar cuál es la cantidad de dicha línea y en qué punto cortará* ab *y* bd. ℜ Tú tienes que los diámetros *ad* y *b c* se intersecan en el punto y *kb* es cateto del triángulo *abd* y es raíz de 18; multiplícalo por sí mismo y da 18. Tú deseas obtener 12, que es ⅓ de 36; por tanto di así: "si el triángulo *abd* que es 18 me da como cateto raíz de 18, ¿qué me dará 12?". Multiplica 12 por 18; antes eleva a cuadrado las dos partes y tendrás 144 y 324; luego multiplica 144 por 324 y da 46.656; divide por 324 y da 144. La raíz de la raíz de 144 es el cateto, es decir raíz de 12. Multiplica este número por dos al cuadrado y da 48. La raíz de 48 será la línea divisoria *ef* opuesta al ángulo *b*, que es recto. Su potencia es igual a la suma de las potencias de *be* y *bf*, Por tanto divide en partes iguales la potencia *df*, es decir 48, y dará 24. La raíz de 24 es *eb*. De esta manera tanto *bf* como *be* serán raíz de 48".



CASO 25. *Dada una línea que separa* $\frac{1}{3}$ *de la superficie cuadrada* abcd, *cuyo lado es 6, y que parte del punto* e *distante 1 de* a, *en la línea* ab y *que divide* bc *en el punto* k *y* cd *en el punto* f, *hallar la cantidad de* ek, ck, bk, fk. ℜ Tú tienes, por la segunda de las divisiones de los cuadrados, que *eb* es 5, y *cf* 3; suma y da 8; luego, si 8 fuera 6, ¿qué sería 3? Multiplica 3 por 6 y da 18, divide por 8 y da 2 $\frac{1}{4}$; entonces *cg* es 2 $\frac{1}{4}$, que es igual a *gk* y *kh* a 3 $\frac{3}{4}$, que es el resto hasta 6, que es el lado. Ahora, según EUCLIDES[106] se prueba que toda superficie paralela, cortada por su diámetro, produce paralelogramos semejantes; entonces diremos que *cg* es g igual a 2 $\frac{1}{4}$ y *gk* también a 2 $\frac{1}{4}$. Multiplica entonces por sí mismo 274 y da 5 $\frac{1}{16}$; multiplica también *gk* por sí mismo, es decir 2 $\frac{1}{4}$, y da también 5 $\frac{1}{16}$; suma los dos resultados y da 10 $\frac{1}{8}$. La raíz de 10 $\frac{1}{8}$ es *ck*, que es parte del diámetro *bc*. Por otra parte tienes que *hk* es igual a 3 $\frac{3}{4}$; multiplica por sí mismo y da 14 $\frac{1}{6}$ duplica y da 28 $\frac{1}{8}$. La raíz de esta cifra es *kb*, es decir la otra parte del diámetro *bc*. En cuanto a las partes de la línea *ef*, tú tienes que *cf* es igual a 3 y *cg* a 2 $\frac{1}{4}$; réstalo de 3 y queda $\frac{3}{4}$; multiplica esto polsi mismo y da $\frac{9}{16}$, suma con 5 $\frac{1}{16}$ y da 5 $\frac{5}{8}$. La raíz de 5 $\frac{5}{8}$ es *fk* Ahora, para *ek*, tú tienes que *al* es igual a 2 $\frac{1}{4}$ resta *ae* que es 1, y queda 1 $\frac{1}{4}$, que multiplicado por sí mismo da l $\frac{9}{16}$; luego multiplica por sí mismo *lk* es decir 3 $\frac{3}{4}$, y da 14 $\frac{4}{16}$; agrégale 1 $\frac{9}{16}$ y da 15 $\frac{5}{8}$. La raíz de 15 $\frac{5}{8}$ es *ke*; la de 10 $\frac{1}{8}$ es *ck*, la de 28 $\frac{1}{8}$ es *bk* y la de 5 $\frac{5}{8}$ es *fk*.



CASO 26. *Dada la línea que sale desde el punto* e *del lado* ab *del cuadrado* abcd, *cuyo lado es 6, estando* e *[a una distancia de] 1*

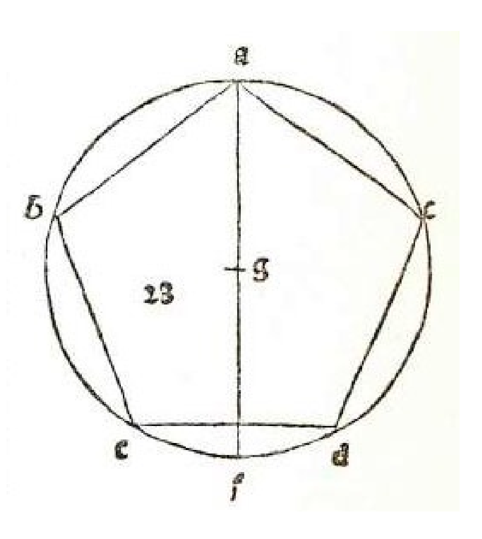
desde a *y terminando la línea, de longitud 6, en el punto* f *de la línea* bd, *hállese qué parte separará de la superficie* abcd *y en qué punto intersecará* bd. Como la linca divisoria es igual a 6, multiplícala por sí mismo y da 36. Tienes que *eb* es igual a 5; multiplícalo por sí mismo y da 25; réstalo de 36 y queda 11. La raíz de 11 es *bf*. Como el cuadrado de *ef* es igual a la suma de los cuadrados de *cb* y *bf*, que contienen el ángulo *b*, recto, y la superficie del triángulo *ebf* se obtiene multiplicando el cateto por la mitad de la base *ef*, halla entonces el cateto que cae sobre *ef*, es decir raíz de $7\ ^{23}/_{36}$, luego toma la mitad de *ef*, es decir 3, eleva al cuadrado y da 9; multiplica 9 por $7\ ^{23}/_{36}$ y da $68\ ^{3}/_{4}$. La raíz de $68\ ^{3}/_{4}$ es la superficie *efb*; siendo *eb* igual a 5 y *bf* raíz de 11.

El pentágono equilátero es una figura de 5 lados iguales y 5 ángulos iguales. Los lados de esta figura se pueden obtener del diámetro del círculo en que está inscrita o bien del lado puede obtenerse el diámetro de dicho círculo. Por medio del lado puede saberse la cuerda correspondiente al ángulo pentagónico o por medio de la cuerda el lado. Con esto se halla la superficie.

En todo pentágono equilátero, la potencia del diámetro del círculo en que está inscrito es a la potencia de su lado como 16 a 10 menos raíz de 20. Damos un ejemplo.

CASO 27. *Si el lado del pentágono equilátero es 4, ¿cuál será el diámetro del círculo dónde está inscrito?* Antes tenías que la proporción del diámetro del círculo que contiene al pentágono con respecto al lado es como 4 a raíz de lo que queda de 10 restándole raíz de 20, es decir, como la potencia del diámetro que es 16 está a la potencia del lado que es 10 menos raíz de 20. Por tanto, di: "si 10 menos raíz de 20 da 16, ¿qué da 4?". Eleva al cuadrado 4 y da 16, multiplica 16 por 16 y da 256, cifra que hay que dividir por 10 menos raíz de 20. Encuentra el divisor así: multiplica 10 menos raíz de 20 por 10 más raíz de 20 y da 80. Éste es tu divisor. Multiplica 10 por 256 y da 2560, divide por 80 y da 32. Ten presente esta cifra. Eleva al cuadrado 256 y da 65.536, multiplica esta cifra por 20 y da 1.310.720; allora, el divisor, que es 80, elévalo al cuadrado y da 6400; divide por esta cifra 1.310.720 y da 204 $\frac{4}{5}$. Tal es el diámetro del círculo que contiene al pentágono: raíz de la suma que se obtiene agregando a raíz de 204 $\frac{4}{5}$, 32, cifra que tuvimos presente.

CASO 28. *Dado el diámetro del círculo que contiene al pentágono equilátero, hallar el lado de éste.* Sea el pentágono *abcde* y sea 12 *af*, diámetro del círculo en que está inscrito el pentágono.



EUCLIDES, en la octava del libro decimotercero, dice que el lado del hexágono y el del decágono, sumados, forman una línea dividida según la proporción que tiene el medio y dos extremos, y en la novena del mismo libro prueba que la potencia del lado del decágono sumada a la potencia del lado del hexágono es igual a la potencia del lado del pentágono inscrito en el mismo círculo. Tú tienes entonces el lado del hexágono, que es 6 y que es la mitad del diámetro, al cual queremos agregar el lado del decágono. Esto se obtiene así: tenías antes que el lado del decágono, unido con el lado del hexágono, forma una línea dividida según la proporción que tiene el medio y dos extremos y en la cual el producto entre la parte menor y toda la línea da cuanto la mayor por sí misma. Di entonces que el lado del decágono es 1 *cosa*; agrega 6 que es el lado del hexágono y da 6 más 1 *cosa*; multiplica 1 *cosa* por 6 más 1 *cosa* y da 6 *cosas* más 1 *censo*. Esto debe ser igual a la multiplicación de la parte mayor, que es 6, por sí misma, es decir, a 36. Tú tienes que 1 *censo* más 6 *cosas* es igual a 36; divide por dos las *cosas* y da 3; multiplícalo por sí mismo y da 9; agrégalo a 36 y da 45. La raíz de 45 menos 3 es el lado del decágono. Ahora bien, dijimos antes que la potencia del lado del decágono sumada a la potencia del lado del hexágono es igual a la potencia del lado del pentágono inscrito en el mismo círculo. Entonces, multiplica raíz de 45 menos 3 por raíz de 45 menos 3, y da 54 menos raíz de 1620; agrégale la potencia del lado del hexágono que es 36 y da 90 menos raíz de 1620. El lado del pentágono será éste: raíz de lo que queda de 90 restándole la raíz

de 1620. Dicho pentágono está inscrito en el círculo cuyo diámetro es 12.

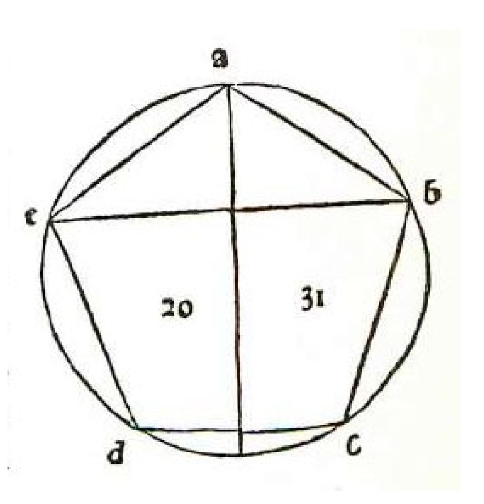
CASO 29. *Siendo la cuerda opuesta al ángulo pentagonal, es decir, cuerda pentagonal del pentágono* abcde, i*gual a 12, queremos hallar el lado de tal pentágono*. Tú debes saber que ha de dividirse 12 según la proporción que tiene el medio y dos extremos, en la cual la parte mayor es el lado del pentágono. Tú tienes la cuerda que es 12; divídela en partes tales que multiplicando la parte menor por 12 dé igual que la otra parte multiplicada por sí misma. Supon entonces que una parte sea 1 *cosa* y la otra 12 menos 1 *cosa*, luego multiplica 1 *cosa* por 12 y da 12 *cosas*; multiplica 12 menos 1 *cosa* por 12 menos 1 *cosa* y da 144 menos 24 *cosas* más 1 *censo*. Restaura[107] las partes y tendrás que 1 *censo* más 144 es igual a 36 *cosas*. Divide por 2 las *cosas* y dará 18; multiplícalo por sí mismo y da 324; resta el número, que es 144, y queda 180. [El resultado de] la división de las *cosas*, que es 18, menos la raíz de 180, es la *cosa* que vale la parte menor. Tú quieres la mayor que es el resto hasta 12, es decir, raíz de 180 menos 6. Este es el lado del pentágono, porque si tú supones que 1 *cosa* es la parte mayor, y 12 menos 1 *cosa* la menor, debes multiplicar 1 *cosa* por 1 *cosa* y da 1 *censo*; y multiplica 12 por 12 menos 1 *cosa* y da 144 menos 12 *cosas*. Ahora bien, tú tienes que 1 *censo* más 12 *cosas* es igual a 144; divide por 2 las *cosas* y da 6; multiplícalo por sí mismo y da 36; agrégalo al número 144 y da 180. Raíz de 180 menos 6 es el lado del pentágono como dijimos antes.

CASO 30. *Siendo el lado del pentágono equilátero* abcde *igual a 4, se quiere saber cuál será la cuerda opuesta al ángulo pentagonal, es decir, la cuerda pentagonal*. Hemos dicho antes que la cantidad de la cuerda debe dividirse según la proporción que tiene el medio y dos extremos y que la parte mayor es el lado del pentágono. Ahora bien, nosotros no tenemos la cuerda del lado pentagonal, pero tenemos de ella una parte, vale decir, un lado

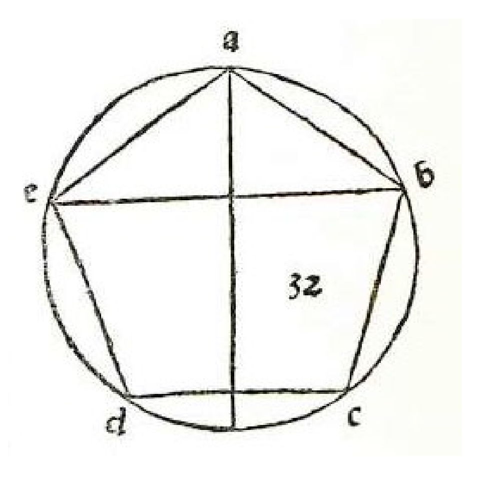
del pentágono, que es 4, y que corresponde a la parte mayor. Por tanto di: "supongamos que la cuerda opuesta al ángulo pentagonal sea 4 más 1 *cosa*, la parte menor entonces será 1 *cosa*. Multiplica 1 *cosa* por 4 más 1 *cosa*, y da 4 *cosas* más 1 *censo*; multiplica luego 4 por 4 y tienes 16. Tú tienes que 4 *cosas* menos 16 es igual a un *censo*. Divide las *cosas* por mitad y dará 2; multiplica esto por sí mismo y da 4; agrega a 16 y da 20. Raíz de 20, menos 2, resultado de la división de las *cosas*, es la *cosa*. Nosotros supusimos que la menor era 1 *cosa*; entonces raíz de 20 menos 2 más 4 es igual a raíz de 20 más 2; luego la cuerda que se opone al ángulo pentagonal es raíz de 20 más 2 cuando el lado del pentágono es 4".

CASO 31. *Suponiendo que la multiplicación del lado del pentágono equilátero más la multiplicación de la cuerda opuesta al ángulo pentagonal da 21, hállese la cantidad del lado, de la cuerda, y el diámetro del círculo que lo contiene.* ℜ Tú tienes el pentágono *abcde* cuyo lado es desconocido, hay que emplear entonces la proporción; toma, por tanto, un pentágono del cual tales partes sean conocidas; ese pentágono será el construido en el círculo cuyo diámetro es 4. La potencia de su lado será 10 menos raíz de 20, y la potencia de la cuerda del ángulo pentagonal será 10 más raíz de 20. Tales potencias sumadas dan 20. Ahora bien, eleva al cuadrado el diámetro, que es 4; da 16. Di entonces: "si 20 da 16 como potencia del diámetro, ¿qué dará 21?". Multiplica 16 por 21 y da 336; esto divídelo por 20 y resulta 16 $\frac{4}{5}$. Tal es la potencia del diámetro del círculo. Ahora di así: "si 16 como diámetro da como lado 10 menos raíz de 20, ¿qué te dará 16 $\frac{4}{5}$?". Multiplica 10 por 16 $\frac{4}{5}$ y da 168, divide por 16 y da 10 $\frac{1}{2}$; multiplica luego por sí mismo 16 $\frac{4}{5}$ y da 282 $\frac{6}{25}$; multiplica este resultado por 20 y da 5644 $\frac{20}{25}$; divide por 16 elevado al cuadrado, es decir por 256, y da 22 $\frac{1}{20}$. Entonces la potencia del lado es 10 $\frac{1}{20}$ menos raíz de 22 $\frac{1}{20}$. En forma

semejante procede para la cuerda *be* que es 10 más raíz de 20: si 16 da 10 más raíz de 20, ¿qué te dará 16 $\frac{4}{5}$? Te dará 10 $\frac{1}{2}$ más raíz de 22 $\frac{1}{20}$ y la cuerda del ángulo pentagonal es raíz de la suma de raíz 22 $\frac{1}{20}$ más 10 $\frac{1}{2}$, y el lado es raíz del residuo de lo que queda de raíz de 10 $\frac{1}{2}$ restándole la raíz de 22 $\frac{1}{20}$; los dos resultados suman 21; porque 10 $\frac{1}{2}$ más 10 $\frac{1}{2}$ da 21 y raíz de 22 $\frac{1}{20}$, al sumarse a menos raíz de 22 $\frac{1}{20}$ no da nada, el diámetro del círculo en que está inscrito el pentágono es raíz de 16 $\frac{4}{5}$.



CASO 32. *Dado el pentágono equilátero* abcde *en que la suma del lado multiplicado por sí mismo más la cuerda del ángulo pentagonal multiplicada por sí misma menos la potencia del diámetro del círculo que contiene a dicho pentágono es 20, hallar cuál es el lado, la cuerda y el diámetro.* ℜ Según dijimos, tú tienes el pentágono del cual tales partes son conocidas; por eso, procede aplicando la proporción. Tú tienes por la precedente que la potencia del lado más la potencia de la cuerda, que da 20, da como potencia del diámetro 16. Resta esta cifra de 20 y queda 4. Entonces di: “si 4 da 20, ¿qué dará 20?”. Multiplica 20 por 20; da 400, divide por 4 y da 100. Tú sabes que 20 da 16 como diámetro, ¿qué dará entonces 100? Multiplica 16 por 100,



da 1600; divide por 20 y da 80; y raíz de 80 es el diámetro. Ahora di así: “el diámetro, que es 16, da como lado 10 menos raíz de 20; ¿qué dará 80?”. Multiplica 10 por 80 y da 800; divide por 16 y da 50; •eleva al cuadrado 80 y da 6400; multiplica por 20 y da 128.000; divide por 16 elevado al cuadrado, es decir por 256, y da 500. La potencia del lado, entonces, es igual a 50 menos raíz de 500, y la cuerda del ángulo pentagonal, mejor dicho, su potencia, es igual a 50 más raíz de 500.

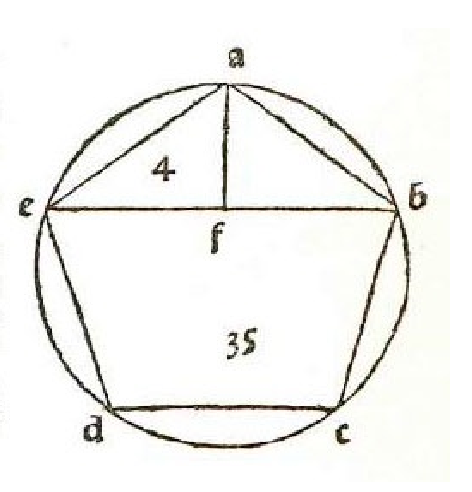
Entonces la potencia del lado, que es 50 menos raíz de 500, más la potencia de la línea opuesta al ángulo pentagonal, que es 50 más raíz de 500, da 100, y restando de esta cifra la potencia del diámetro que es 80, queda 20, según queríamos.

CASO 33. *Dado el pentágono equilátero* abcde *en que multiplicando por sí mismos un lado, la línea opuesta al ángulo pentagonal, el diámetro del círculo en que está inscrito el pentágono, y sumando los resultados da 40, hallar la cantidad de un lado, de la línea opuesta al ángulo pentagonal y del diámetro del círculo*. Tú tienes que en el pentágono dado la potencia del lado más la potencia de la línea opuesta al ángulo pentagonal da 20; y la del diámetro hemos dicho que es 16. La suma de ambas cifras da 36. Si estas tres potencias, cuya suma es 36, dan como potencia del diámetro 16, ¿qué dará 40? Multiplica 16 por 40 y da 640; divide por 36 y da $17 \frac{7}{9}$. Ésta es la potencia del diámetro. Ahora di: “si 16 da como lado 10 menos raíz de 20, ¿qué dará $17 \frac{7}{9}$?”. Multiplica 10 por $17 \frac{7}{9}$ y da $177 \frac{7}{9}$; divide por 16 y da $11 \frac{16}{144}$; luego, eleva al cuadrado $17 \frac{7}{9}$ y da $316 \frac{4}{81}$; multiplica por 20 y da $6320 \frac{80}{81}$; divide por 16 elevado al cuadrado, es decir por 256, y da $24 \frac{14336}{20736}$. Luego el lado es $11 \frac{16}{144}$ menos raíz de $24 \frac{14336}{20736}$. Ésta es la potencia del lado; la potencia de la línea opuesta al ángulo pentagonal es $11 \frac{16}{144}$ más raíz de $24 \frac{14336}{20736}$; ambas, sumadas dan $22 \frac{2}{9}$. Agregando este

resultado a la potencia del diámetro del círculo, que es 17 $^{7}/_{9}$, da 40. Tienes entonces que el lado del pentágono es raíz del residuo que queda restando raíz de 24 $^{14336}/_{20736}$ a 11 $^{1}/_{9}$ y la línea opuesta al ángulo pentagonal es raíz de la suma de raíz de 24 $^{14336}/_{20736}$ más 11 $^{1}/_{9}$; y el diámetro del círculo que los circunscribe es raíz de 17 $^{7}/_{9}$.

CASO 34. *Dado un pentágono equilátero cuyo lado es 4 y la perpendicular que cae desde un ángulo pentagonal sobre el lado opuesto a ese ángulo, se quiere hallar la cantidad de la perpendicular*. Haz así: tú tienes el pentágono *abcde* del cual cada lado es igual a 4 y por el cuarto caso de los pentágonos tienes que la línea opuesta al ángulo pentagónico es raíz de 20 más 2, lo cual vale para *ac* y *ad*, siendo cada una raíz de 20 más 2. Tales líneas forman el triángulo *acd* cuya base es *cd*, que es lado del pentágono y es igual a 4. Entonces, cómo el cateto cae desde el ángulo *a* sobre la base *cd*, dividiéndola en partes iguales en el punto *f*, y como *ac* es igual a *ad*, siendo ambas iguales a raíz de 20 más 2 y, por la penúltima del primero de EUCLIDES, tienes que el cuadrado de *ac* es igual a la suma de los cuadrados de *af* y *cf* que contienen el ángulo recto, y que el cuadrado de *ad* es igual a la suma de los cuadrados de *af* y *df*, multiplica, por tanto, *ac*, que es raíz de 20 más 2, por raíz de 20 más 2 y da 24 más raíz de 320. De esta cantidad resta [el resultado de] la multiplicación de *cf* [por sí mismo], es decir, de 2, que multiplicado por sí mismo da 4; réstalo de 24 más raíz de 320 y queda 20 más raíz de 320. La raíz de la suma de raíz de 320 más 20 es el cateto *af*, es decir, la perpendicular que buscamos.

CASO 35. *Dado un ángulo del pentágono equilátero cuyo lado es 4 y la perpendicular que cae sobre la línea opuesta al ángulo pentagonal, hallar la cantidad de la perpendicular*. ℞ Sea el pentágono *abcde* y la línea *be* opuesta al ángulo pentagonal, la cual por la precedente es igual a raíz de 20 más 2. Se forma así un triángulo *abe*, de cuyo ángulo *a* cae la perpendicular sobre *be* en el punto *f*, dividiéndola en partes iguales. Divide entonces raíz de 20 más 2 [en dos partes iguales] y dará raíz de 5 más 1; multiplica esto por sí mismo y da 6 más raíz de 20; resta esto de la potencia del lado *ab*, que es 16, y queda 10 menos raíz de 20. Entonces la perpendicular *af* es raíz de lo que queda de 10 restándole raíz de 20.



CASO 36. *Hallar la cantidad de la superficie del pentágono equilátero* abcde *siendo igual a 12 el diámetro del círculo en que está inscrito*. ℞ EUCLIDES en la octava[108] del decimotercero dice que el lado del hexágono junto con el lado del decágono forman una línea dividida según la proporción que tienen el medio y dos extremos, cuando ambos están inscritos en un mismo círculo. En la novena[109] del decimotercero se prueba que la potencia del lado del decágono más la potencia del lado del hexágono es igual a la potencia del lado del pentágono inscrito en el mismo círculo. Asimismo prueba en la décima[110] del decimotercero que la línea opuesta al ángulo pentagonal y dividida según la proporción que tiene el medio y dos extremos tiene la parte mayor igual al lado del pentágono. Por lo tanto, supón que una línea esté dividida en forma tal que la parte menor sea 1 *cosa* y la mayor 6, que es la mitad del diámetro y es

igual al lado del hexágono. Toda la línea será igual a 6 más 1 *cosa*. Multiplica entonces 1 *cosa* por 6 más 1 *cosa* y da 6 *cosas* más 1 *censo*. Ahora, multiplica 6 por sí mismo y da 36, número que es igual a 1 *censo* más 6 *cosas*. Divide por mitad las *cosas* y dará 3; multiplica esto por sí mismo y da 9; agrega el número, que es 36 y da 45. Raíz de 45 menos 3 es la *cosa*, es decir, el lado del decágono. Ahora bien, se dijo antes que la potencia del lado del decágono más la potencia del lado del hexágono era igual a la potencia del lado del pentágono, cuando ambos estaban inscritos en un mismo círculo. Por tanto, multiplica raíz de 45 menos 3 por raíz de 45 menos 3 y da 54 menos raíz de 1620. Agrega la potencia del lado del hexágono, que es 36, y da 90 menos raíz de 1620. Ésta es la potencia del lado del pentágono, y la potencia de la línea opuesta al ángulo pentagonal es 90 más raíz de 1620. Ahora bien, EUCLIDES demuestra en la novena del decimocuarto que $\frac{3}{4}$ del diámetro del círculo donde está inscrito el pentágono, multiplicado por $\frac{5}{6}$ de la línea opuesta al ángulo pentagonal, da la superficie de todo el pentágono. Yo encuentro que se obtiene lo mismo multiplicando $\frac{5}{8}$ del diámetro del círculo en que está inscrito el pentágono, por toda la línea opuesta al ángulo pentagónico. En efecto si tú multiplicas *b* ^ cateto por la base *a g* del triángulo *ab g* y da la superficie de dos triángulos. Sabes que *ag* es $\frac{4}{8}$, de manera que multiplicando *bk* por *ah* que es $\frac{5}{8}$ dará dos triángulos y medio, es decir medio pentágono. Entonces multiplicando *ah* por *be* que es doble de *bk*, dará la superficie de cinco triángulos, es decir todo el pentágono. Por tanto toma $\frac{5}{8}$ del diámetro, que es 12, y tendrás 7 $\frac{1}{2}$ multiplica por sí mismo y da 56 $\frac{1}{4}$; multiplica esto por 90 y da 5062 $\frac{1}{2}$; eleva luego al cuadrado 56 $\frac{1}{4}$ y da 3164 $\frac{1}{16}$; multiplica por 1620 y da 5.125.781 $\frac{1}{4}$. La raíz de la suma de raíz de 5.125.781 $\frac{1}{4}$ más 5062 $\frac{1}{2}$ es la superficie de tal pentágono.

Ꞩ El hexágono es una superficie contenida por seis lados iguales, siendo cada uno de ellos igual al semidiámetro del círculo en que está inscrito el hexágono. Éste se divide en seis triángulos equiláteros mediante los cuales se tiene su superficie por medio de los catetos.

CASO 37. *Dado un hexágono equilátero* abcdef *cuyo lado es igual a 6 se quiere hallar la cantidad de su superficie*. Ꞩ Si bien esta figura no se encuentra en los cinco cuerpos regulares, sin embargo diré algo con respecto a ella, pues se resuelve en triángulos equiláteros.

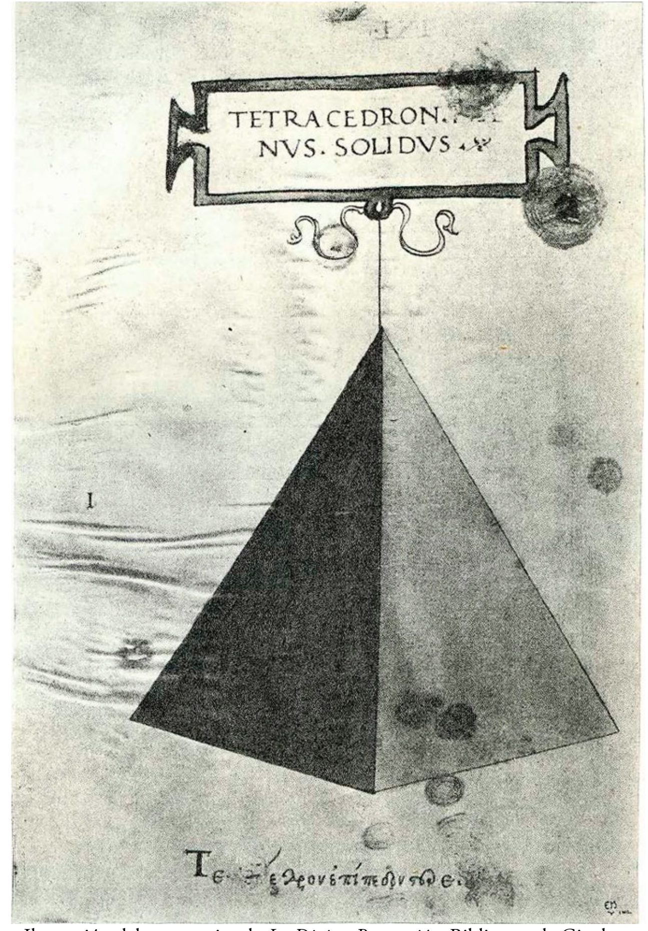
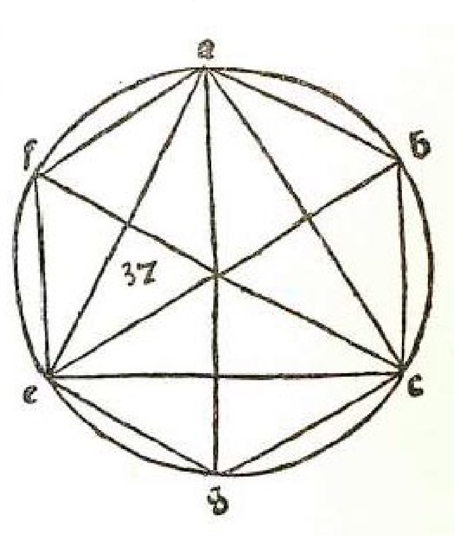


Ilustración del manuscrito de *La Divina Proporción*, Biblioteca de Ginebra.

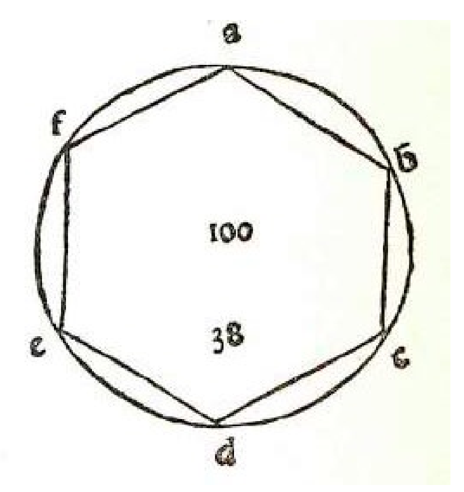
Ahora bien, tú sabes que el hexágono *abcdef* se divide en seis triángulos equiláteros. Toma uno de estos seis triángulos, cuyo lado sabes que es igual a 6, y halla el cateto conforme al caso primero de los triángulos, que dice que la potencia del lado es sesquitercia con respecto a la potencia del cateto, y entonces la potencia del lado es 36 y la potencia del cateto será 27. Divide 36 por 2 elevado al cuadrado [o sea por 4] y dará 9; multiplica 9 por 27 y da 243. La raíz de 243 es la superficie de uno de los seis triángulos. Para obtener los seis triángulos, multiplica 6 por sí mismo y da 36; multiplica luego 36 por 243 y da 8748. La raíz de 8748 es la superficie del hexágono *abcdef*

cuyo lado es 6. Tal superficie puede obtenerse por otro camino: tú sabes que en el hexágono hay un triángulo equilátero cuyos ángulos coinciden con tres ángulos del hexágono, es decir *ace*. Ahora bien, supusimos que el diámetro del círculo es igual a 12; entonces el cateto de este triángulo es igual a 9, vale decir $\frac{3}{4}$ de 12, y su base *ce* es igual a raíz de 108, pues el cateto por todo el diámetro es igual a un lado del triángulo por sí mismo; entonces un lado es raíz de 108. Sea este lado la base *ce*. Ahora bien, si tú multiplicas el cateto por toda la base, resulta de ello la superficie de dos triángulos; ésta es la superficie de todo el hexágono, pues *ad*, que es el diámetro, pasa por g, que es el centro, y forma seis triángulos de los cuales tres están en el triángulo *ace*, siendo uno *aeg*, el otro *acg* y el tercero *ecg*. Los que están fuera del triángulo *ace* son *afe, abc* y *edc*. Ahora bien, *aeg* es igual a *afe*, porque *af* del triángulo *afe* es igual al lado *ag* del triángulo *aeg* y el lado *fe* del triángulo *afe* es igual a *eg*, lado del triángulo *aeg*, y *ae* es base tanto de uno como del otro triángulo. De la misma manera se demuestra que cada uno de los otros dos es semejante e igual [al otro de base común]. Luego multipliqúese 9 al cuadrado, es decir 81, por 108, que es la base, y resultará la superficie de dos triángulos que equivale a la superficie del hexágono. Entonces, 81 por 108 da 8748 y la raíz de 8748 es la superficie del hexágono *abcdef*, según dijimos antes.



CASO 38. *Dada la superficie del hexágono* abcdef, *la cual es igual a 100, se quiere hallar la cantidad de sus lados.* Como el hexágono se divide en seis triángulos equiláteros, toma uno de

ellos, es decir la sexta parte, que será la sexta parte de la superficie [del hexágono]. Toma pues un sexto de 100, vale decir 16 ⅔, y multiplícalo por sí mismo; da 277 $^{7}/_{9}$. Ahora bien, dado un triángulo cuya superficie es raíz de 277 $^{7}/_{9}$, ¿cuál será su lado? Supon que el lado sea 1 *cosa*; luego halla el cateto, vale decir, multiplica 1 *cosa* por sí misma y da 1 *censo*, luego multiplica por sí misma media base que es media *cosa* y da ¼ de *censo*, réstalo de 1 *censo* y queda ¾ de *censo*. Éste es el cateto. Tú deseas conocer la superficie; por tanto, multiplica el cateto por media base, que es ½ *cosa*: eleva al cuadrado [½ *cosa*] y da ¼ de *censo*; multiplica ¼ de *censo* por ¾ de *censo* y da $^{3}/_{16}$ de *censo de censo*, es decir, 277 $^{7}/_{9}$. Reduce a [quebrados de] una sola naturaleza, y tendrás que 3 *censos de censos* son 40.000 [dieciseisavos]. Divide por 27 y da 1481 $^{13}/_{27}$. La raíz de la raíz de 1481 $^{13}/_{27}$ es el lado del hexágono que se busca.

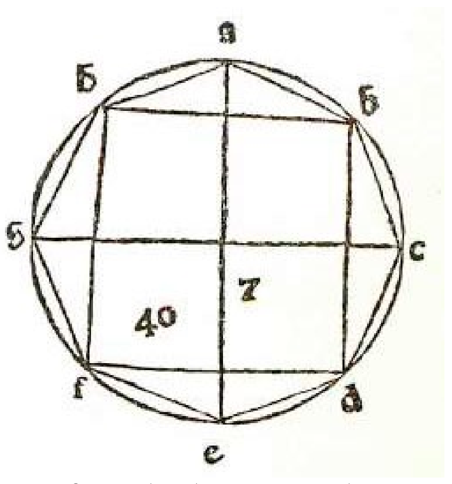


El octágono es una superficie de ocho lados iguales que, inscrita en el círculo, lo toca con todos sus ángulos. Se resuelve en ocho triángulos mediante los cuales se obtiene la superficie por medio del cateto y del lado considerado como base de uno de los ocho triángulos.

CASO 39. *Dado el círculo cuyo diámetro es igual a 7, se quiere hallar el lado del octágono contenido por dicho círculo*. Tampoco esta superficie es necesaria a los cinco cuerpos regulares; sin embargo no quiero dejarla de lado. Ve, pues, cuánto da el lado del cuadrado mayor que puede construirse en este círculo que circunscribe al octágono. Supón que la potencia del diámetro del círculo sea igual a 40. Toma la mitad que es 24 $\frac{1}{2}$; la raíz de 24 $\frac{1}{2}$ es el lado del cuadrado mayor que se puede construir. En efecto, el diámetro es 7, y sea éste *bf*; y el cuadrado sea *bdfh*. Por la penúltima del primero de EUCLIDES, tienes que el cuadrado del diámetro *bf* es igual a la suma de los cuadrados de las dos líneas *bd* y *df*, que contienen el ángulo *d*, que es recto, y son iguales entre sí. La potencia de *bf* es igual a 49 y las potencias de *bd* y *df*, sumadas, dan 49, pues, siendo iguales, *bd y df* da cada una 24 $\frac{1}{2}$ y cada una de ellas es lado del cuadrado. Luego, en el punto *i*, divide *bd*, que es lado del cuadrado y cuya potencia es 24 $\frac{1}{2}$, en dos partes, [cuya potencia] da 6 $\frac{1}{8}$. Ahora bien, tienes el octágono *abcdefgh* cuyo centro es *k* traza *ka* que pasa por *i*; tal línea será igual a medio diámetro, es decir a 3 $\frac{1}{2}$; por otra parte *bi* es raíz de 6 $\frac{1}{8}$. Tú deseas conocer *ab* cuya potencia es igual a la de *bi* más la de *ai*. Multiplica entonces por sí mismo *ak*, que es 3 $\frac{1}{2}$ menos la línea *i* que es raíz de 6 $\frac{1}{8}$, y da 18 $\frac{3}{8}$ menos raíz de 300 $\frac{1}{8}$; luego multiplica por sí mismo *bi* que es raíz de 6 $\frac{1}{8}$, y da 6 $\frac{1}{8}$; agrégalo a 18 $\frac{3}{8}$ menos raíz de 300 $\frac{1}{8}$ y

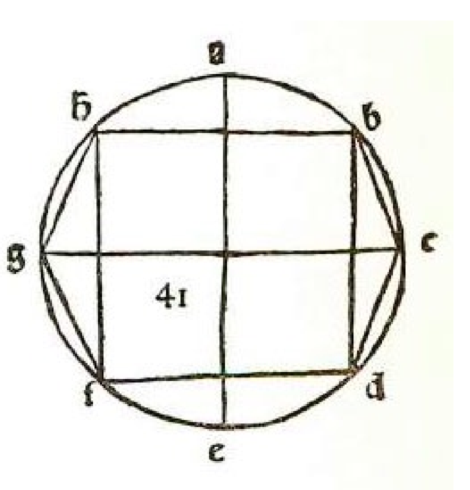
da 24 ½ menos raíz de 300 ⅛. Entonces di que el lado de este octágono es raíz de lo que queda de 24 ½ restándole raíz de 300 ⅛.

CASO 40. *Dado el diámetro del círculo que circunscribe al octágono y es igual a 7, se quiere saber cuánto es la superficie del octágono*. Por la regla anterior tienes que el cuadrado mayor que se puede construir en dicho círculo tiene el lado igual a raíz de 24 ½. Tú tienes que el diámetro *ae* del círculo es 7 y que divide *bh* en el punto *i* y *fd* en el punto *l*; y tienes cuatro triángulos, *abh*, *bcd*, *def*, y *fgh*, iguales y semejantes; por tanto la base de uno es igual a la base de todos los demás y el cateto de uno es igual al cateto de todos los demás. Entonces, *ae* menos *il* es igual a dos catetos. Ahora bien, *ae* es igual a 7 e *il* es igual a raíz de 24 ½. Entonces dos catetos son iguales a 7 menos raíz de 24 ½ y la base *bh* es igual a raíz de 24 ½. Por tanto, si multiplicas dos catetos por una base se obtiene la superficie de los cuatro triángulos, pues tú sabes que, multiplicando un cateto por la base de su triángulo, resulta la superficie de dos triángulos. En efecto, en el segundo caso de los triángulos tienes que multiplicando el cateto por la mitad de la base resulta la superficie del triángulo. Se sigue de ello que multiplicando dos catetos por una base resulta la superficie de cuatro triángulos. Por tanto, multiplica 7 menos raíz de 24 ½, por raíz de 24 ½ y da raíz de 1200 ½ menos 24 ½; suma esto a la superficie del cuadrado *bdfh*, que es 24 ½ y tendrás que la superficie del octágono es igual a raíz de 1200 ½.



Este resultado puede obtenerse de otra forma, pues en todo círculo, multiplicando su diámetro por el lado del cuadrado mayor que se puede inscribir en él, resulta la superficie del octágono inscrito en dicho círculo. Por tanto, multiplica por sí mismo el diámetro, que es 7, y da 49; y 49 por 24 ½ da 1200 ½. La raíz de 1200 ½ es la superficie del octágono.

CASO 41. *Si la superficie del octágono es 100, ¿cuál será el diámetro del círculo que lo circunscribe?* ℜ Tú tienes por la precedente que el diámetro, que es 7, da como superficie raíz de 1200 ½; entonces raíz de 1200 ½ de superficie da como diámetro 7. Por eso di: "si 1200 ½ de superficie del octágono da 7 como diámetro del círculo en que está inscrito, ¿qué dará 100 de superficie?". Eleva al cuadrado 100 y da 10.000. Ahora bien, como la proporción de una superficie a otra superficie es doble con respecto a la proporción entre el lado de la una y el lado de la otra, eleva al cuadrado del cuadrado 7 y da 2401; multiplica esto por 10.000 y da 24.010.000; esto divídelo por 1200 ½: reduce antes a [quebrados de] una misma naturaleza y dará 48.020.000 [medios]; divídelo por 2401 y da 20.000. La raíz de la raíz de 20.000 será el diámetro del círculo que contiene al octágono cuya superficie es 100, y es lo que buscábamos.

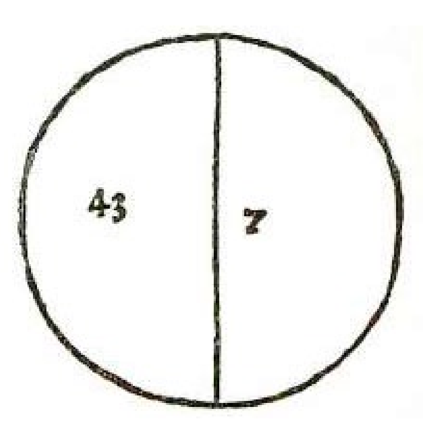


CASO 42. *Dado un octágono cuyo lado es igual a 4, hallar el diámetro del círculo donde está inscrito*. ℜ En todo octágono la proporción entre el diámetro del círculo donde está inscrito y su lado es igual a la proporción entre 2 y 2 menos raíz de 2. Se demuestra por la vigésimoprimera del tercero de EUCLIDES. En

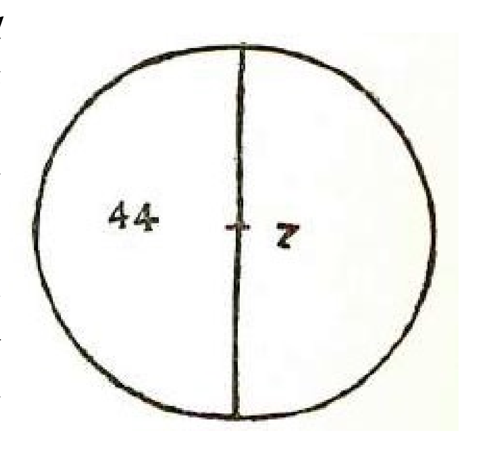
el cuadrilátero de lados y ángulos iguales e inscrito en un círculo la potencia del diámetro *ac*, por la penúltima del primero de EUCLIDES, es igual a la de *ab* más la de *bc*, pues *ac* es opuesta al ángulo *b* que es recto. Por otra parte tienes que *ac* es 2 y su potencia es 4; toma la mitad, que es 2, y de ella la raíz cuadrada que es igual al lado del cuadrado, *ab*. Divide a éste en partes iguales en el punto *e* y desde el centro *f* tira *fd* pasando por *c*, y sea el semidiámetro *df* igual a 1. Ahora bien, *ae* es raíz de ½ y si tú trazas *ad*, éste será el lado del octágono, cuya potencia será igual a la suma de las potencias de las dos líneas *ae y de*, que contienen al ángulo recto. La línea *ae* es raíz de ½ que multiplicada por sí misma da ½, y *de* es 1 menos raíz de ½ esto multiplicado por sí mismo da 1 ½ menos raíz de 2; sumando a esto la potencia de *ae*, que es ½, da 2 menos raíz de 2, que es el lado del octágono, es decir *ad*. Entonces, si 2 menos raíz de 2 como lado te da 2 como diámetro, ¿qué te dará 4? Multiplica 2 por 4 y da 8; divide esta cifra por 2 menos raíz de 2. Como se trata de un binomio, halla el divisor así: multiplica 2 menos raíz de 2 por 2 más raíz de 2, y da 2 que es el divisor. Eleva al cuadrado 8 y da 64; multiplica por 2 y da 128; divide por 2 y da 64; eleva al cuadrado 64 y da 4096; multiplica por 2 y da 8192; divide por 2 elevado al cuadrado, es decir por 4, y resulta 2048. De esta manera tienes que el diámetro es la raíz de la suma de raíz de 2048 más 64.

El círculo es una superficie comprendida por una línea sola llamada circunferencia. En él la línea mayor que se puede trazar se llama diámetro y divide el círculo y la superficie en dos partes iguales. Su punto medio se llama *centro* y todas las líneas conducidas desde éste a la circunferencia son todas iguales. Por medio del diámetro y de la circunferencia se obtiene la superficie y por medio de la superficie se obtiene el diámetro y la circunferencia.

CASO 43. *Se quiere hallar la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es igual a 7.* Debes saber que hasta ahora no se ha podido encontrar la circunferencia con toda exactitud; sin embargo trataremos el asunto conforme a la aproximación de los grandes geómetras. Éstos opinan que la circunferencia es menos de tres diámetros y un séptimo y más de tres diámetros y un octavo de diámetro. De esta manera, tomando tres diámetros y un séptimo, da 22, que es igual a la circunferencia.



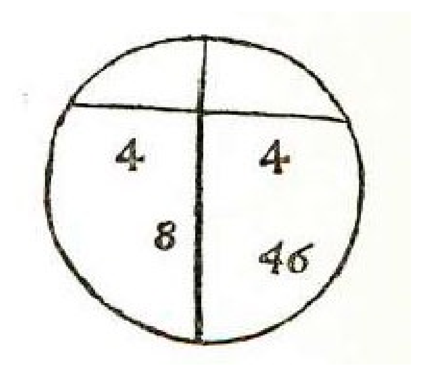
CASO 44. *Si el diámetro del círculo es 7, ¿cuánto es la superficie?* La superficie de todo círculo es $\frac{11}{14}$ de la potencia de su diámetro; por lo tanto multiplica 7 por sí mismo y da 49; esto multiplícalo por 11 y da 539; divide por 14 y resulta 38 $\frac{1}{2}$. Ésta es la superficie del círculo.



Con otro procedimiento, toma la mitad del diámetro que es 3 $\frac{1}{2}$ y la mitad de la circunferencia, que es 11; multiplica 3 $\frac{1}{2}$ por 11 y da también 38 $\frac{1}{2}$. Este resultado puede obtenerse también, como los anteriores, de muchas otras maneras.

CASO 45. *Hallar el diámetro de un círculo cuya superficie es igual a* 38 $\frac{1}{2}$. Si en todo círculo su superficie es $\frac{11}{14}$ de la potencia del diámetro, entonces la potencia del diámetro es $\frac{3}{14}$ más que la superficie del círculo. Por tanto, multiplica 38 $\frac{1}{2}$ por 14 y da 539; divide esto por 11 y resulta 49. La raíz de 49, que es 7, es el diámetro del círculo cuya superficie es 38 $\frac{1}{2}$.

CASO 46. *Dado un círculo cuyo diámetro es 10, del cual una línea que termina en la circunferencia corta 2, se quiere hallar la cantidad de la línea divisoria.* ℞



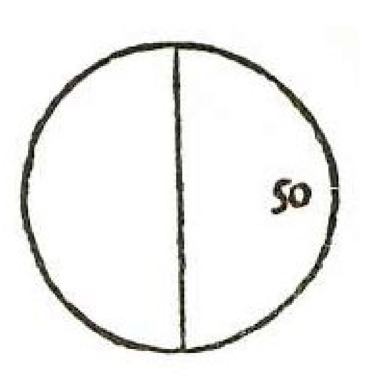
Tienes por la trigésimocuarta[111] del tercero de EUCLIDES que, en líneas que se intersecan en el círculo, el producto de una parte de una línea por la otra es igual al producto de una parte de la otra línea por su otra parte. Entonces, si multiplicas una parte del diámetro, que es 2, por la otra parte, que es 8, da 16; y como la línea divisoria es intersecada por el diámetro en ángulo recto, está dividida en partes iguales; entonces cada parte es raíz de 16, que multiplicada por raíz de 16 da 16. Luego la línea divisoria es, en cada parte, igual a 4 y en su totalidad a 8.

CASO 47. *Dado el diámetro de un círculo igual a 10 y dividido por una línea que de un lado es igual a 3 y de otro igual a 4, hallar en qué parte dicha línea divide al diámetro.* ℞ Por la precedente se entendió que, para todas las líneas que se intersecan en el círculo, el producto de una parte de una por la otra parte es igual al de una parte de la otra línea por su otra parte. Ahora bien, tienes que una parte de la línea es igual a 3 y la otra 4; multiplica 3 por 4 y da 12; por tanto, debes dividir 10 en dos partes tales que multiplicando una por la otra resulte 12. Entonces di que una parte es igual a 1 *cosa*, y la otra a 10 menos 1 *cosa*; multiplica 1 *cosa* por 10 menos 1 *cosa* y da 10 *cosas* menos 1 *censo*. Esto debe dar 12. Restaura las partes y tendrás que 10 *cosas* es igual a 1 *censo* más 12; divide por mitad las *cosas*

y dará 5; multiplícalo por sí mismo y da 25; resta el número 12 y queda 13. Restando raíz de 13 a[l resultado de] la división de las *cosas*, es decir 5, da la *cosa* que supusimos que era una parte. Entonces, el diámetro se dividió en 5 menos raíz de 13 y quedó del otro lado 5 más raíz de 13.

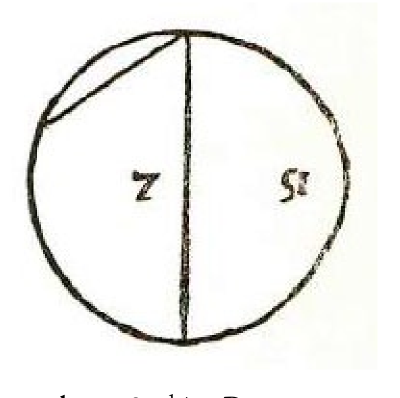
CASO 48. *Si un tercio del diámetro de un círculo multiplicado por el resto de dicho diámetro da 32, se quiere saber cuál es dicho resto*. Supón que todo el diámetro sea 3 cosas, *y que* $\frac{1}{3}$ *es igual a 1 cosa*. Multiplica 1 *cosa* por 2 *cosas* y da 2 *censos*, y esto es igual a 32; divide por 2 *censos* y resulta 16. La raíz de 16, que es 4, es la *cosa*, es decir $\frac{1}{3}$ del diámetro. El resto, $\frac{2}{3}$, es 8, que multiplicado por 4 da 32. Entonces, todo el diámetro es igual a 12.

CASO 49. *Dado el diámetro de un círculo que equivale a 10 y una línea igual a 9* $\frac{1}{2}$ *que corta 3 de tal diámetro, halla en qué parte se dividirá la línea*. Procede así: multiplica las partes del diámetro, una por otra. Siendo una parte 3 y la otra 7, multiplica 3 por 7 y da 21. Ahora bien, di así: "hazme de 9 $\frac{1}{2}$ dos partes tales, que multiplicando una por la otra resulte 21". Supón que una parte sea 1 *cosa* y la otra 9 $\frac{1}{2}$ menos 1 *cosa*; multiplica 1 *cosa* por 9 $\frac{1}{2}$ menos 1 *cosa* y da 9 $\frac{1}{2}$ *cosas* menos 1 *censo*. Se debe obtener 21. Restaura las partes y tendrás que 9 $\frac{1}{2}$ *cosas* es igual a 1 *censo* más 21. Divide por la mitad las cosas y tendrás 4 $\frac{3}{4}$; multiplica esto por sí mismo y da 22 $\frac{9}{16}$; resta el número 21 y queda 1 $\frac{9}{16}$. Restando raíz de 1 $\frac{9}{16}$ a [l resultado de] la división de las *cosas*, que es 4 $\frac{3}{4}$, da la *cosa* que es igual a una de las partes de la línea, siendo la otra 4 $\frac{3}{4}$ más raíz de 1 $\frac{9}{16}$. Tienes así que una parte es 4 $\frac{3}{4}$ menos raíz de 1 $\frac{9}{16}$ y la otra es 4 $\frac{3}{4}$ más raíz de 1 $\frac{9}{16}$. Es decir que una es 3 $\frac{1}{2}$ y la otra 6.



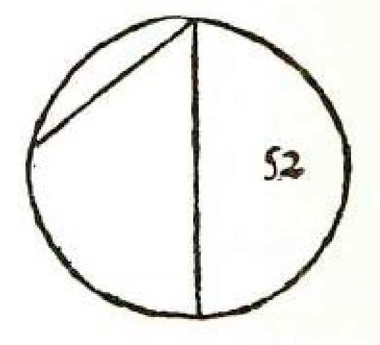
CASO 50. La superficie de un círculo es 28; ¿cuál es su circunferencia? ℞ Será raíz de 372. Es fácil.

CASO 51. *Dado un círculo cuyo diámetro es 7 y una línea que corta $\frac{1}{8}$ de la circunferencia, hallar cuánto separa de la superficie*. ℞ Por el caso cuadragésimo de este tratado tienes que, en los cuatro triángulos que están alrededor del cuadrado construido en el círculo, su superficie es raíz de 1200 $\frac{1}{2}$ menos 24 $\frac{1}{2}$; divide tal superficie en cuatro partes, vale decir, eleva al cuadrado 4 y da 16; divide 1200 $\frac{1}{2}$ por 16 y resulta 75 $\frac{1}{32}$ y divide 24 $\frac{1}{2}$ por 4 y resulta 6 $\frac{1}{8}$. Tienes entonces, para el triángulo *abh*, raíz de 75 $\frac{1}{32}$, menos 6 $\frac{1}{8}$; divide esto en partes iguales y tendrás raíz de 18 $\frac{97}{128}$, menos 3 $\frac{1}{16}$; luego, halla la superficie que queda fuera del cuadrado *bdfh*. Finalmente, con respecto a la circunferencia, tú sabes que la superficie del círculo es 38 $\frac{1}{2}$; por el caso cuadragésimotercero de este tratado y por el cuadragésimo del mismo tienes que el cuadrado de tal círculo es 24 $\frac{1}{4}$, réstalo de 38 $\frac{1}{2}$ y queda 14; divide esto en ocho partes iguales y da 1 $\frac{3}{4}$; resta raíz de 18 $\frac{97}{128}$ menos 3 $\frac{1}{16}$ y resulta 4 $\frac{13}{16}$ menos raíz de 18 $\frac{97}{128}$. Esto es lo que la línea separa de la superficie del círculo al separar una octava parte de la circunferencia.



CASO 52. *Si la línea separa la sexta parte de la circunferencia del círculo cuyo diámetro es 7, ¿qué separará de la superficie?* ℞ La línea que separa $\frac{1}{6}$ de la circunferencia es necesariamente igual al semidiámetro de tal círculo y es igual a 3 $\frac{1}{2}$. Por tanto,

construye un triángulo cuyo vértice esté en el centro *g* del círculo; luego traza *ab, ag* y *bg*; se formará un triángulo equilátero del cual cada lado será igual a $3 \frac{1}{2}$. Halla el cateto y encontrarás que es igual a raíz de $9 \frac{3}{16}$, multiplícalo por la mitad de la base, que es $1 \frac{3}{4}$, multiplicada por sí misma, que da $3 \frac{1}{16}$; lo cual multiplicado por $9 \frac{3}{16}$ da $28 \frac{35}{256}$, cuya raíz es el triángulo *abc*. Ahora bien, toma $\frac{1}{6}$ de la superficie del círculo es decir de $38 \frac{1}{2}$ y será $6 \frac{5}{12}$; réstale la raíz de $28 \frac{35}{256}$. Di entonces que, separando $\frac{1}{5}$ de la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es 7, se separa de la superficie $6 \frac{5}{12}$ menos raíz de $28 \frac{35}{256}$.



CASO 53. *La línea recta separa de la circunferencia de un círculo, cuyo diámetro es 12, la quinta parte. Se quiere saber cuánto separa de su superficie*. Por la última de los pentágonos tienes que en el círculo cuyo diámetro es 12, la potencia de la superficie del pentágono circunscrito por él es $5062 \frac{1}{2}$ más raíz de $5.125.781 \frac{1}{4}$; toma de esta cantidad la quinta parte, vale decir, divide $5062 \frac{1}{2}$ por la potencia de 5, que es 25, y resulta $202 \frac{1}{2}$; luego eleva al cuadrado 25 y da 625; divide por esto $5.125.781 \frac{1}{4}$ y resulta raíz de $8201 \frac{1}{4}$; tienes entonces que $\frac{1}{5}$ de aquella cantidad es $202 \frac{1}{2}$ más raíz de $8201 \frac{1}{4}$. Ahora ve cuánto es de la superficie del círculo cuyo diámetro es 12, siendo esta superficie igual a $113 \frac{1}{7}$. Toma $\frac{1}{5}$ que es $22 \frac{22}{35}$. De esta cantidad resta la raíz de la suma de raíz de $8201 \frac{1}{4}$ más $202 \frac{1}{2}$. Entonces la línea que separa $\frac{1}{5}$ de la circunferencia separa de la superficie $22 \frac{22}{35}$ menos la raíz de la suma de raíz de $8201 \frac{1}{4}$ más $202 \frac{1}{2}$, lo cual es lo que se busca.

CASO 54. *Si una línea recta corta la cuarta parte de la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es 7, hallar que parte*

separa de la superficie. Tú tienes por el primer caso del octágono que en el mayor cuadrado que puede construirse en el círculo cuyo diámetro es igual a 7, su lado es la raíz de 24 $\frac{1}{2}$, que multiplicada por sí misma da 24 $\frac{1}{2}$. Resta esta cantidad de la superficie del círculo, que es 38 $\frac{1}{2}$, y queda 14; divide por 4 y resulta 3 $\frac{1}{2}$, que es lo que separa de la superficie de dicho círculo la línea que corta $\frac{1}{4}$ de la circunferencia.

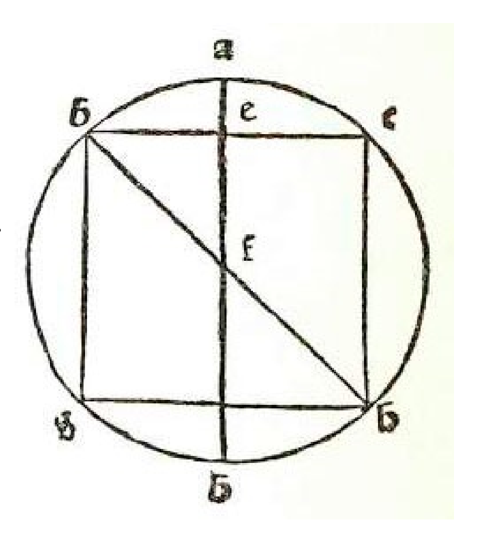
CASO 55. *Se quiere saber qué parte de la superficie separa una línea que corta un tercio de la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es igual a 7.* Si construyes en el círculo un triángulo equilátero que toque la circunferencia con sus ángulos, dicho triángulo dividirá la circunferencia en tres partes iguales. Sea tal triángulo *abc*; tú tienes, por el primer caso del hexágono, que el cateto es $\frac{3}{4}$ del diámetro del círculo; entonces, el cateto es 5 $\frac{1}{4}$, que multiplicado por sí mismo da 27 $\frac{9}{16}$. Ahora, por el primer caso de los triángulos, tienes que la potencia de los catetos es sesquitercia con respecto a la potencia de su lado[112]; entonces, el lado es raíz de 36 $\frac{3}{4}$; luego, multiplica 27 $\frac{9}{16}$ por la mitad de la base, es decir por 9 $\frac{3}{16}$, y da raíz de 253 $\frac{59}{256}$. Esta cantidad réstala de la superficie del círculo que es 38 $\frac{1}{2}$. Ahora bien, toma $\frac{1}{3}$ de tales cantidades: $\frac{1}{3}$ de 38 $\frac{1}{2}$ es 12 $\frac{5}{6}$; luego toma $\frac{1}{3}$ de la raíz de 253 $\frac{59}{256}$, es decir divide por 3 elevado al cuadrado, es decir, por 9, y resulta raíz de 28 $\frac{59}{2304}$. De esta manera tienes que la línea que separa un tercio de la circunferencia del círculo cuyo diámetro es 7, separa de su superficie 12 $\frac{5}{6}$ menos raíz de 28 $\frac{59}{2304}$.

TRATADO SEGUNDO

Los cuerpos tienen tres dimensiones, es decir, ancho, longitud y profundidad. Los hay de muchas clases. Sin embargo, en este tratado yo no tengo la intención de hablar sino de los cinco regulares, conforme a lo que dije al principio del primer tratado. Por tanto, mostraré las cantidades de los lados, superficies y cuadraturas de los cinco cuerpos, cuyos catetos están en proporción con sus lados, vale decir, el eje del cuerpo mayor con su lado como el eje del cuerpo menor con el suyo, cuando son de una misma especie. De la misma manera están en proporción las superficies y cuadraturas: el cuerpo de cuatro bases con el cuerpo de cuatro bases, el cubo con el cubo y así todos los demás. Así como en el primer tratado se empezó por la superficie triangular, que es la primera superficie, de la misma manera, ahora, en éste, empezaremos con el cuerpo de cuatro bases triangulares equilátero contenido por la esfera, y hablaré de sus lados y ejes, y del diámetro de la esfera que lo contiene.

La línea plana[113] es aquella línea que corta la esfera en dos partes y forma una superficie circular. El diámetro de tal círculo se toma como cantidad de tal línea plana. De la misma manera corta todo otro cuerpo, formando una superficie conforme a la naturaleza del mismo. Cuando divide la esfera, la mitad de dicha línea es siempre media proporcional entre las dos partes del eje dividido por dicha línea. Y la suma de la potencia de la mitad de tal línea más la potencia de la parte del eje que sale del

centro y termina en esa línea divisoria es igual a la potencia de la mitad del eje de la esfera, tal como sucede en las superficies planas. Ejemplo: sea una esfera *abcd* cuyo centro es *f* y cuyo eje es *ad*. La línea plana que divide el eje *ad* en el punto *e* es *bc*. Traza la línea *fb*. Digo que la potencia de *bf* es igual a la suma de las potencias de las dos líneas *be* y *ef*, pues *bf* es opuesta al ángulo *e*, que es recto, como se comprueba por la penúltima del primero de EUCLIDES. Y si se traza la línea *gh* equidistante de *bc*, y a una distancia igual a *gh*, la cual interseca *ad* en el punto *i*, digo que la potencia de *ad* es igual la suma de las potencias de *bc* y *el*, pues si se traza *bh* y *ch*, el ángulo *c* será recto por estar inscrito en un semicírculo, y la potencia de *bh*, que se opone a dicho ángulo, es igual por tanto a la suma de las potencias de *bc* más *ch*. Ahora bien, *bh es* igual a *ad*, pues ambos son ejes de dicha esfera, y *bc* y *gh* se trazaron iguales y equidistantes [……][114].

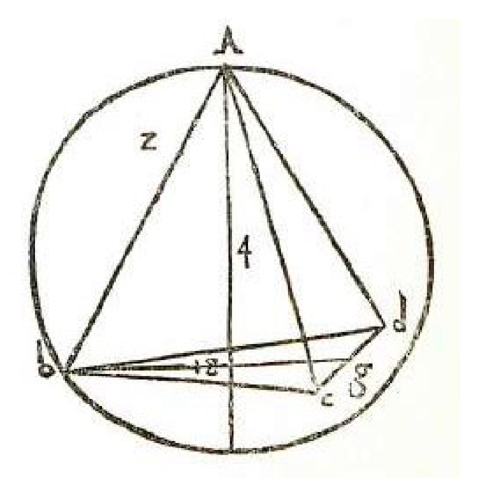


CASO 1. *Se quiere hallar el cuerpo de cuatro bases triangulares equilátero cuyo eje es igual a 4 del diámetro de la esfera que lo contiene*. Debes saber que en todo cuerpo de cuatro bases triangulares equilátero, la proporción entre el eje y su lado es la misma que la proporción entre el lado y el diámetro de la esfera que lo contiene; y el eje del cuerpo de cuatro bases es al diámetro de la esfera que lo contiene como 2 es a 3. Hemos supuesto que el eje es igual a 4; entonces el diámetro de la esfera que lo contiene es igual a 6. Demostraremos que es así. Tú tienes el cuerpo de cuatro bases *abcd* cuyo eje es *ae*, siendo el centro de la esfera *f*; dicho eje *a e* abarca tres cuartos del eje de la esfera. Ahora bien, como cada ángulo dista igualmente del centro *f*, trazando *fa, fb, fc* y *fd*, necesariamente será cada una de estas líneas igual a las otras, pues parten del centro y terminan en la circunferencia. Y, luego, como *ae* está sobre la base *bcd en* ángulo recto, *be* será igual a raíz de 8, pues la potencia de *bf* es igual a la suma de las de *be* y *ef*. Como *fb es* $\frac{3}{4}$ del eje, es 3, que multiplicado por sí mismo da 9, que es la potencia de *bf*; en efecto, *ef* es 1, que multiplicado por sí mismo da 1, suma 1 y la potencia de *be*, que es raíz de 8, es decir suma 1 más 8 y da 9 que es a la potencia de *bf*, siendo igual a la potencia de *af* que es semidiámetro y es igual a 3. Entonces todo el diámetro es 6. Se sabe que la línea *be* es raíz cuadrada de 8, pues el lado de dicho cuerpo de cuatro bases es raíz de 24, y el cateto *bg* es raíz de 18 y los $\frac{2}{3}$ de raíz de 18 es raíz de 8; tal es *be*, como dije, siendo el diámetro propuesto igual a 6.

Se dijo, además, que el lado de dicho cuerpo de cuatro bases era medio proporcional entre el eje de tal cuerpo y el diámetro de la esfera, es decir entre 4 y 6. Por tanto multiplica 4 por 6 y

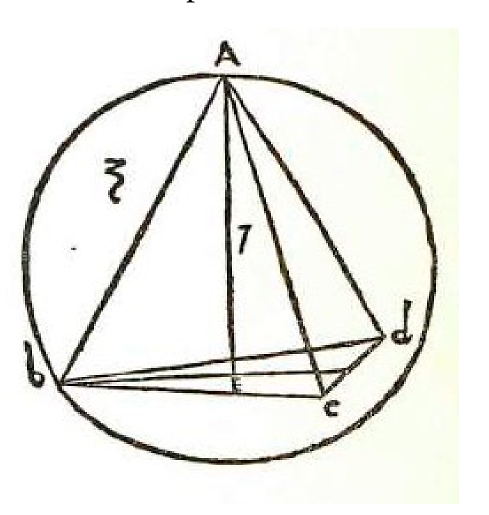
da 24; la raíz de 24 es dicho lado. Lo mismo vale para los demás, tal como dijimos antes. Ahora bien, para la superficie halla el cateto de una base cuyo lado al cuadrado sabes que es 24; toma $\frac{1}{2}$ al cuadrado, es decir [$\frac{1}{4}$, esto es,] 6; réstalo de 24 y queda 18, que es *bg*, como dije antes con respecto al cateto de la base. Multiplica 6 por 18 y da 108 y esta es la superficie de una base; pero tú quieres conocer la de 4. Eleva 4 al cuadrado y da 16; multiplica 16 por 108 y da 1728. La raíz de 1728 es la superficie del cuerpo de cuatro bases cuyo eje es igual a 4.

CASO 2. *Hallar el lado del cuerpo de cuatro bases triangulares equilátero contenido por la esfera cuyo diámetro es 7.* ℜ Por la precedente tienes que la proporción entre el eje y el lado es la misma que entre el lado y el diámetro de la esfera que contiene a dicho cuerpo y tienes que la potencia del eje con respecto a la potencia de su lado es sesquiáltera e igualmente la del lado con respecto a la del diámetro. Ahora bien, tú tienes el diámetro que es igual a 7 y cuya potencia es 49; entonces la potencia del diámetro de la esfera es a la potencia del lado del cuerpo de cuatro bases como 3 a 2. Entonces di: "si 3 fuera 49 ¿qué sería 2?". Multiplica 2 por 49 y da 98; divide por 3 y resulta 32 $\frac{2}{3}$. La raíz de 32 $\frac{2}{3}$ es el lado del cuerpo de cuatro bases contenido por la esfera cuyo diámetro es igual a 7.



CASO 3. *Hallar cuál es el eje de un cuerpo de cuatro bases triangulares equilátero cuyo lado es raíz de 12.* ℜ Como arriba, puede lograrse por medio de las proporciones, pues la proporción de la potencia del lado con respecto a la potencia del

eje es sesquiáltera como 3 con respecto a 2; entonces la potencia del eje es $\frac{2}{3}$ de la potencia del lado. Por otra parte hemos establecido que la potencia del lado del cuerpo de cuatro bases, igual a raíz, es 12. Toma de esta cantidad $\frac{2}{3}$, vale decir 8, y tal es la potencia del eje. Con otro procedimiento, tú tienes el lado del cuerpo de cuatro bases igual a raíz de 12; halla el cateto de una de las bases de la cual sabes que cada lado es raíz de 12. Ahora bien, por el caso primero de los triángulos tienes que la potencia del cateto es sesquitercia con respecto a la potencia de su lado, es decir que es $\frac{3}{4}$ de la potencia del lado. Tres cuartos de 12 es igual a 9; y la raíz de 9 es el cateto. Ahora bien, tú deseas conocer el eje *a e*, que es igual a $\frac{2}{3}$, de raíz de 9; y la raíz de 9 es 3, y $\frac{2}{3}$ de 3 es igual a 2. Dicha cantidad multiplicada por sí misma da 4; resta de 12 y dará 8. La raíz de 8 es el eje, pues éste cae sobre *e* en ángulo recto y por la penúltima del primero de EUCLIDES el cuadrado del lado *ab* es igual a la suma de los cuadrados de *ae* y *be*. La línea *ab* es raíz de 12 y la potencia de *b e* es igual a 4, que restado de 12 da 8 para el eje *ae*, que es lo que nos proponíamos.



CASO 4. *Dado el cuerpo de cuatro bases triangulares equilátero cuyo eje es igual a 4, hallar su cuadratura.* En primer término halla el diámetro de una de las bases, es decir, el cateto, sabiendo que para cada uno [el lado de] la base [respectiva] es raíz de 24. Divide en partes iguales raíz de 24 y será raíz de 6; multiplícala por sí misma y da 6; resta esto de 24 y da 18. La raíz de 18 es el cateto *bg* de la base *bcd*. Multiplica entonces 6 por 18 y da 108,

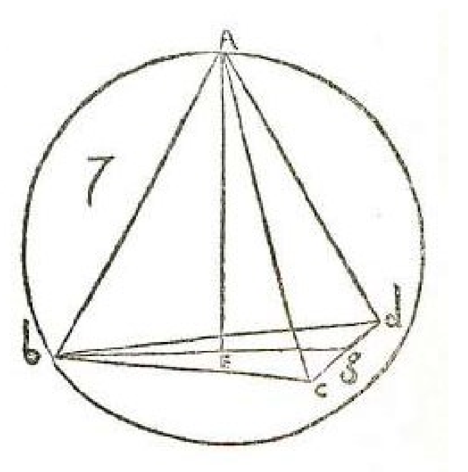
que es la superficie de la base. Queremos multiplicar la superficie por el eje que es igual a 16 y 16 por 108 da 1728. Tal cantidad debe dividirse por 3 elevado al cuadrado, es decir por 9; divide entonces 1728 por 9 y resulta 192; y la raíz de 192 será la cuadratura.

CASO 5. *Dado un cuerpo de cuatro bases triangulares equilátero, cuyo lado es raíz de 24 y cuyo eje es igual a 4, se quiere hallar la cantidad* [*de las líneas que van*] *desde el centro a cada ángulo*. ☙

Tú tienes el cuerpo de cuatro bases *abcd* del cual cada lado es igual a raíz de 24 y el eje *ae* es igual a 4, y cuyo centro *f* está en el eje. Ahora bien, como entre *af* y *ae* se da la misma proporción que entre 3 y 4, que es proporción sesquitercia[115], será *af* igual a $\frac{3}{4}$ de *ae*, que es igual 4; entonces *af* es igual a 3. Se ha dicho que un lado es igual a raíz de 24 y como *af* es igual a 3, entonces *fe* es igual a 1, porque *ae* es igual a 4 y restando *af*, que es 3, queda 1, es decir, *fe*. El eje cae sobre *e* que está en los $\frac{2}{3}$ del cateto *bg* y es centro de la base *bcd*. Ahora bien, por la precedente, *bg* es raíz de 18; toma de dicho cantidad $\frac{2}{3}$ y será raíz de 8. Traza la línea *bf*; por la penúltima del primero de EUCLIDES, su potencia es igual a la suma de la potencia de las dos líneas *be* y *ef*. Ahora bien, según hemos demostrado en el primer caso de este tratado, *bf* es igual a 3 y es igual a *af*, y la potencia de *bf* es igual a 9 y la de *ef* igual a 1. Resta 1 de 9 y queda 8 que es la potencia de *be*, que sumada a la potencia de *ef*, que es 1, da 9. La raíz de 9 es *bf*, vale decir 3; también *af*, *cf* y *df* serán iguales a 3, pues todas estas líneas parten del centro *f* y terminan en la circunferencia.

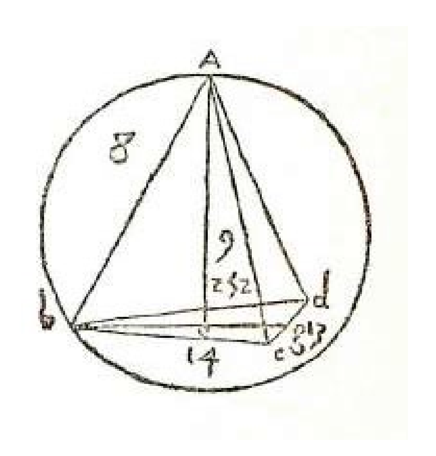
CASO 6. *Hallar la cantidad de los lados del cuerpo de cuatro bases triangulares equilátero cuya cuadratura es 100*. ☙ Procede así: toma un cuerpo de cuatro bases del cual se conozcan el eje y los lados. Sea tal cuerpo *abcd* cuyo eje es raíz de 16, siendo cada uno de sus lados raíz de 24, por ser la potencia del eje igual a 16 y sesquiáltera la potencia de su lado, cuando el cuerpo de cuatro

bases es equilátero. Halla el cateto de una de las bases, que por el cuarto caso de este tratado es igual a raíz de 18 y sea este *bg*; multiplícalo por la mitad de la base *dc* que es raíz de 6 y 6 por 18 da 108; multiplica esta cifra por el eje *ae* que es raíz de 16 y da raíz de 1728; de esto toma la tercera parte y tendrás 192. La raíz de 192 es la cuadratura del cuerpo de cuatro bases cuyo eje es igual a 4. Por tanto eleva al cubo 4 y da 64. Como 192 es un cuadrado, eleva 64 al cuadrado y da 4096. Luego di así: "si 192 da 4096, ¿qué dará 100?". Elévalo al cuadrado y resulta 10.000; multiplica esta cantidad por 4096 y da 40.960.000; divide por 192 y resulta raíz de 213.333 $\frac{1}{2}$ y la raíz de la raíz cúbica es el eje. Ahora bien, tú quieres conocer el lado y, como antes se dijo que la potencia del eje con respecto a la potencia del lado es sesquiáltera, halla por tanto dos números en proporción sesquiáltera, a saber 2 y 3. Eleva 2 al cubo y da 8; luego eleva 3 al cubo y da 27. Di entonces: "si 8 me da 27, ¿qué me dará 213.333 $\frac{1}{3}$?". Multiplica 27 por 213.333 $\frac{1}{3}$ y da 5.760.000, divide por 8 y resulta 720.000 y la raíz de la raíz cúbica de 720.000 es el lado.



CASO 7. *Se quiere hallar la cantidad del eje del cuerpo de cuatro bases* abcd, *siendo* bed *la base de la cual el lado* bd *es igual a 15*, bca *14 y* cd *a 13, y siendo 252 la superficie de dicho cuerpo.* Procede así: halla cuánto es la superficie de la base *bed*, y encontrarás que es igual a 84; luego multiplica por 3 la cuadratura de dicho cuerpo, es decir 252 por 3, y da 756; divide por 84, que es la superficie de la base, y resulta 9. Esta cantidad es el eje *ag*. Se comprueba multiplicando la superficie de la base,

84, por el eje, que es 9, y da 756. Ahora bien, toda pirámide es un tercio del cilindro correspondiente, toma entonces $\frac{1}{3}$ de 756, que es el cilindro, y tendrás 252; luego su eje es igual a 9.



CASO 8. *Dado el cuerpo de cuatro bases triangulares* abcd, *siendo* bcd *su base, y siendo* bd *igual a 15*, bc *a 14 y* cd *a 13 y el eje* ag *y* bga *10 y* cga *9 se quiere hallar* dg. Procede así: halla el cateto que cae desde el punto *d* sobre la base *cb* [y sea *ed*]; éste cae en el punto *e* y es igual a 12. Dicho cateto cae a una distancia de 5 desde *c*. [Por otra parte], tú tienes el triángulo *beg* del cual *bg* es igual a 10, *cg* es igual a 9 y *bc* a 14. Halla el cateto que cae sobre *bc* a una distancia desde *c* igual a 6 $\frac{9}{28}$ dicho cateto igual a raíz de 41 $\frac{31}{784}$; réstalo de 12 y queda 12 menos raíz de 41 $\frac{31}{784}$; multiplica por sí mismo y da 185 $\frac{31}{784}$ menos raíz de 23.638 $\frac{608}{784}$; agrega a esto la potencia de la diferencia que hay desde [*f*,] donde cae *fg* al cateto *de*, es decir 1 $\frac{9}{28}$, que multiplicado por sí mismo da 1 $\frac{585}{784}$. Agrega esto a 185 $\frac{31}{784}$ y da 186 $\frac{616}{784}$. Entonces *dg* es 186 $\frac{616}{784}$ menos raíz de 23.638 $\frac{608}{784}$, mejor dicho, la raíz de lo que queda restando raíz de 23.638 $\frac{608}{784}$ de 186 $\frac{616}{784}$.

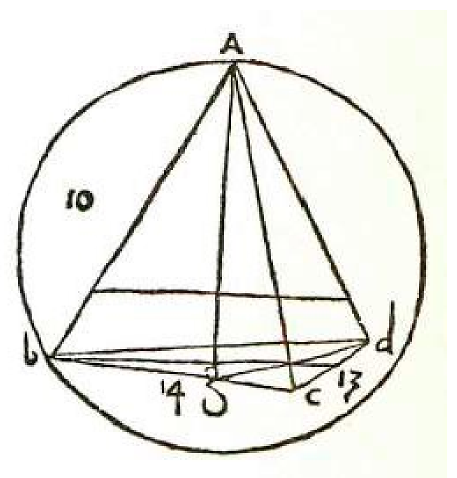
CASO 9. *Dado el cuerpo de cuatro bases triangulares equilátero* abed*, en el cual la base es* abcd, *siendo* bd *igual a 15*, be *igual a 14 y* cd *a 13 y siendo su eje* ag *igual a 8*, bg *a 10*, cg *a 9 y* dg *a lo que queda de 186* $\frac{616}{784}$ *restándole raíz de 23.638* $\frac{608}{784}$, *hallar los lados* ab, ac *y* ad. Antes debe hallarse *ab*, cuya potencia por la penúltima del primero de EUCLIDES, es igual a la suma de las potencias de *ag* y *bg* que contienen el ángulo *g*, que es recto, siendo *ab* opuesto a él. Por lo tanto, multiplica por sí mismo *bg*,

es decir 10, y da 100; luego multiplica por sí mismo *ag*, es decir 8, y da 64; suma y da 164. La raíz de 164 es *ab*. Ahora bien, para *ac*, cuya potencia es igual a la suma de las potencias de *ag* y *cg*, multiplica por sí mismo *a g*, es decir 8, y da 64; luego multiplica por sí mismo *cg*, es decir 9, da 81; suma y da 145. La raíz de 145 es igual a *ac*. Finalmente, en cuanto a *ad*, cuya potencia es igual a la suma de las potencias de *ag* y *dg*, multiplica por sí mismo *ag*, es decir 8, y da 64; suma esta cantidad a la potencia de *dg*, que es igual a 186 $^{616}/_{784}$ menos raíz de 23.638 $^{608}/_{784}$ y da 250 $^{616}/_{784}$ menos raíz 23.638 $^{608}/_{784}$. Ésta es la potencia de *ad; ab* es igual a la raíz de 164 y *ac* a la raíz de 145. Y esto es lo que queríamos saber.

CASO 10. *Se quiere hallar el eje* ag *del cuerpo de cuatro bases triangulares equilátero* abcd *del cual* ab *es igual a 20*, ac *a 18*, ad *a 16*, bd *a 15*, bc *a 14 y* dc *a 13*. Procede así: halla el cateto de la base *bcd*, que cae sobre *bc*, y encontrarás que es igual a 12 y que cae a una distancia de *c* igual a 5. Sea *de* tal cateto. Luego halla el cateto de la cara *abc* que también cae sobre la línea *be* a una distancia de *c* igual a 4 $^{2}/_{7}$ y encontrarás que este cateto es igual a raíz de 305 $^{31}/_{49}$. Sea *ai* [este cateto]. Toma la diferencia que hay de 4 $^{2}/_{7}$ a 5, vale decir $^{5}/_{7}$; multiplícalo por sí mismo y da $^{25}/_{49}$; resta esto de la potencia de *ad* y queda 25 5 $^{25}/_{49}$; traza desde *i* la equidistante de *de*, es decir, *ih*, también igual a 12. Multiplica esta cantidad por sí misma, y tienes 144. Tú tienes el triángulo *ahi* en el cual la potencia de uno de sus lados es 305 $^{31}/_{49}$, la de otro es 255 $^{24}/_{49}$ y la del tercero 144. Halla el cateto que cae desde el ángulo *a* sobre la base *hi*, cuya potencia es 144: súmala a 255 $^{24}/_{49}$ y da 399 $^{24}/_{49}$; resta de esto la potencia de *ai*, es decir 305 $^{31}/_{49}$ y queda 93 $^{42}/_{49}$; divide esto por el doble de la base *hi*, que es 24 y resulta 3 $^{1071}/_{1176}$. Esto es igual a *gh*; multiplícalo por sí mismo y da 15 $^{406161}/_{138296}$; réstalo de 255 $^{24}/_{49}$ y queda 240 $^{271216}/_{1382976}$; y la raíz de esta cantidad es el eje *ag*. Comprobación:

tú tienes el cuerpo de cuatro bases *abcd* cuyo eje cae sobre la base *bcd* sobre el punto *g*, en ángulo recto y cae sobre la línea *hi*, pues el cateto *ai* del triángulo *abc* cae sobre la línea *bc* en ángulo recto; tienes también el cateto *de* de la base *bcd* que cae *sobre* la línea *bc* y que es igual a 12; por otra parte, la línea *hi*, que trazaste equidistante de *de*, es también igual a 12. Tira luego *hd* equidistante de *bc* y el ángulo *h* será recto. Por fin, traza *ah* y digo que la potencia de *ad* es igual a la suma de las de *ah* y *dh* que es igual a *ei*, cuya potencia es $^{25}/_{49}$; réstala de la potencia de *ad*, que es 256, y queda *ah* igual a raíz de 255 $^{24}/_{49}$. Por otra parte la potencia de *ac* es igual a la de *ai*, que es 16, porque el ángulo *i* es recto, más la potencia de *ic*, que es igual a 18 $^{18}/_{49}$; resta esta cantidad de la potencia de *ac*, es decir de 324 y queda *ai* igual a raíz de 305 $^{31}/_{49}$. La potencia de la base *hi* es igual a 144. Tú tienes el triángulo *ahi* en el cual la potencia de *ah* es 255 $^{24}/_{49}$, y la de *ai* es 305 $^{31}/_{49}$ y la de *hi* es 144. Halla [ahora] el cateto: suma 144 a 255 $^{24}/_{49}$ y da 399 $^{24}/_{49}$; resta 305 $^{31}/_{49}$ y queda 93 $^{42}/_{49}$; divide esta cantidad por 24, que es el doble de la base, y resulta 3 $^{1071}/_{1776}$. Tal es *gh*. La potencia de *ah* es igual a la suma de las potencias de *ag* y *gh*, pues el ángulo *g* es recto. Entonces multiplica por sí mismo *gh*, que es igual a 3 $^{1071}/_{1176}$ y da 15 $^{406161}/_{1382976}$; resta esta cantidad de la potencia de *ah*, que es 255 $^{24}/_{49}$ y da el eje *ag*.

CASO 11. *Si una línea plana separa* $\frac{2}{3}$ *del eje* a g *del cuerpo de cuatro bases triangulares equilátero* abcd, *¿cuánto separará de la superficie de dicho cuerpo, siendo tal superficie 100?*



℞ Tú tienes por el sexto caso sobre el cuerpo de cuatro bases triangulares que, cuando la cuadratura es igual a 100, el eje es igual a la raíz de la raíz cúbica de 213.333 $\frac{1}{3}$. Entonces toma $\frac{1}{3}$ al cuadrado del cubo, es [decir $\frac{1}{459}$] y dará raíz de raíz cúbica de 292 $\frac{1369}{2187}$; multiplica esto por 2 al cuadrado del cubo y da raíz de raíz cúbica de 18.728 $\frac{1864}{2187}$. Tal cantidad es igual a $\frac{2}{3}$ del eje. Ahora bien, tú deseas conocer su cuadrado; por tanto, di: "si raíz de raíz cúbica de 4096 da raíz de 192, ¿qué dará raíz de 18.728 $\frac{1864}{2187}$?". Multiplica por 192 que es la cuadratura de un cuerpo de cuatro bases cuyo eje es igual a 4, que elevado al cuadrado del cubo da 4096. En efecto, como 192 es raíz, hay que elevar el eje al cubo del cuadrado; entonces 192 por 18.728 $\frac{1864}{2187}$ da 3.595.939 $\frac{1407}{2187}$; divide por 4096 y resulta raíz de 86 7 $\frac{8196096}{8957952}$. Tal es la parte que se separa.

CASO 12. *Si una línea plana corta un tercio del eje, cayendo dentro de las líneas de la base de un cuerpo de cuatro bases* abed, *siendo* bcd *la base y siendo* bd *igual a 15*, bca *14 y* cd *a 13, y el eje* ag *a 9, ¿cuánto separará de la superficie de dicho cuerpo esa línea?*

℞ Cuadra la base y tendrás 84; multiplica por esta cantidad *ag*, es decir 9, y da 756; divídelo por 3 y resulta 252. Tal es la cuadratura de ese cuerpo de cuatro bases. Tú deseas un cuerpo de cuatro bases cuyo eje sea 3, es decir $\frac{1}{3}$ de *ag* que es 9. Los lados de la base *bcd* están divididos según la proporción con que

está dividido el eje Por tanto, toma una tercera parte de *bd*, es decir de 15, y tendrás 5; la tercera parte de *bc*, que es 14 será 4 $\frac{2}{3}$ y la tercera parte de *cd* que es 13 es 4 $\frac{1}{3}$. Toma $\frac{1}{3}$ del cateto *ag*, que es 12, y tendrás 4; esto multiplícalo por la mitad de 4 $\frac{2}{3}$, es decir, por 2 $\frac{1}{3}$: $\frac{2}{3}$ por 4 da 9 $\frac{1}{3}$; luego, multiplica esto por el eje, que es 3, y da 28; divide por 3, resulta 9 $\frac{1}{3}$. Esta es la cantidad que [la línea plana] separa de la cuadratura de cuatro bases, al separar $\frac{1}{3}$ del eje *ag*, que es 9.

CASO 13. *Dado un cuerpo de cuatro bases triangulares* abcd, *cuyo eje* ag *es igual a 10 y cuya cuadratura es igual a 280, y dada una línea plana equidistante de la base que separa 40, de dicha cuadratura se quiere hallar en qué lugar dicha línea plana corta al eje* ag. Procede así: tú sabes que la proporción entre la cuadratura de un cuerpo de cuatro bases y su eje es igual a la que existe entre la cuadratura de otro cuerpo de cuatro bases y su eje. Ahora bien, tienes el cuerpo de cuatro bases *abcd* cuya cuadratura es 280 y su eje 10. Eleva al cubo y da 1000. Por otra parte tienes otro cuerpo de cuatro bases cuya cuadratura es 40; ¿cuál será su eje? Di así: “si 280 de cuadratura te da 1000 como eje, ¿qué te dará 40?”. Multiplica 40 por 1000 y da 40.000; esto divídelo por 280, que es la cuadratura del cuerpo de cuatro bases *abcd*, y resultará 142 $\frac{5}{7}$. La raíz cúbica de 142 $\frac{5}{7}$ es lo que se corta de *ag*, al separar 40 de la cuadratura.

[DEL CUBO]

El segundo de los cuerpos regulares es el cubo, el cual tiene seis caras, ocho ángulos y doce lados iguales; y todas sus caras son cuadradas y de lados y ángulos iguales. Dicho cuerpo circunscrito en la circunferencia la toca con todos sus ángulos; y por medio de sus lados se obtiene la superficie y la cuadratura. La proporción entre la potencia de su lado y la potencia del diámetro de la esfera que lo contiene es como 1 a 3, es decir triple; y la superficie del cubo es doble con respecto a la potencia del diámetro de la esfera que lo contiene, es decir, como 2 a 1.

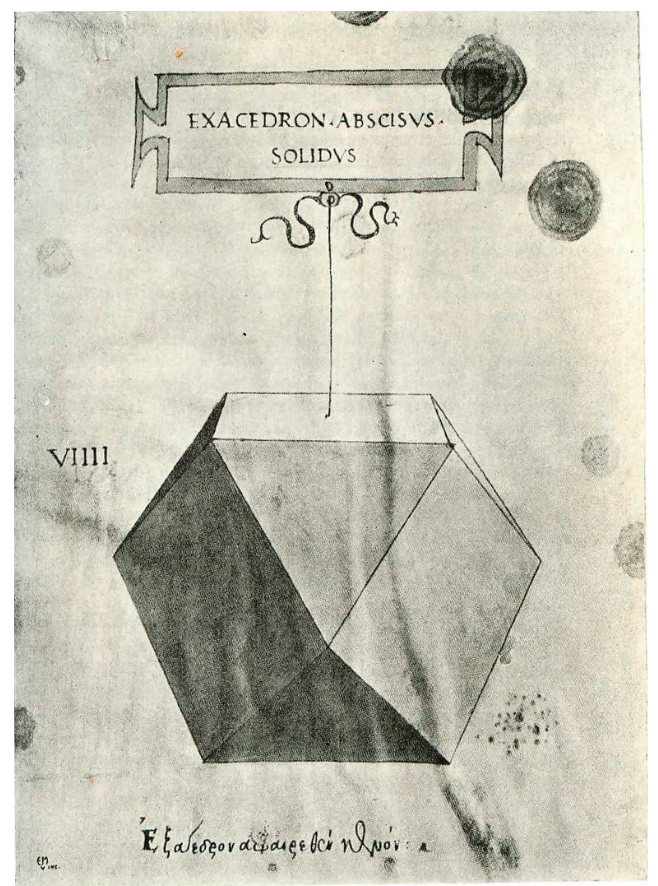
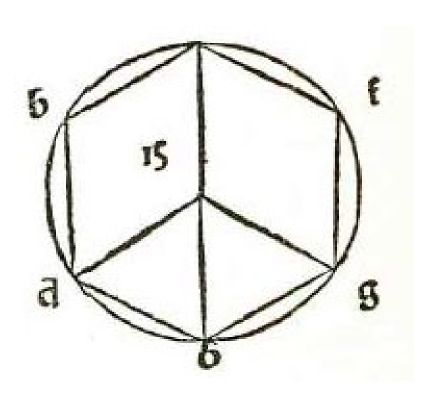


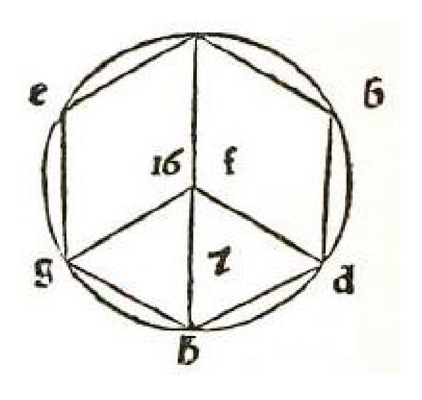
Ilustración del manuscrito de *La Divina Proporción*. Biblioteca de Ginebra.

CASO 14. *Dado el lado del cubo equilátero igual a 4, hallar cuál será el diámetro de la esfera que lo circunscribe.* Digo que la proporción de la potencia del diámetro o de la esfera con respecto a la del lado del cubo circunscrito en ésta, es triple, es decir como 3 a 1. Por tanto, multiplica por sí mismo el lado del cubo, que es 4, y da 16. Ahora bien, di así: “si 1 fuera 16 ¿qué sería 3?”. Multiplica 3 por 16 y da 48; esto divídelo por 1 y resulta 48. Tal es la potencia del diámetro de la esfera que contiene al cubo; entonces el diámetro de la esfera es raíz de 48. Para entendernos mejor, tú tienes el cubo *abcdefgh*; tira la línea *ad*, cuyo cuadrado, por la penúltima del primero de EUCLIDES, es igual a la suma de las potencias de *ab* y *bd*, iguales cada una a

4. Multiplicando ambas por sí mismas y sumando [el resultado de] las multiplicaciones, da 32; entonces, la potencia d*e ad* es igual a 32. Ahora bien, si tú trazas *ah*, por la misma razón que antes, su potencia es igual a la suma de las de *ad* y *dh* que contienen el ángulo *d* que es recto; y *dh* es igual a 4, cuya potencia es 16; y el cuadrado de *ad* es igual a 32, que sumado a 16 da 48. Ésta es la potencia de *ah*, línea que pasa por el centro del cubo y de la esfera. El ángulo *a* y el ángulo *h* tocan la circunferencia de la esfera; entonces *ah* es diámetro de la esfera y su potencia es 48. Dicha esfera circunscribe al cubo en que la potencia del lado es igual a 16, es decir, de la potencia del diámetro.



CASO 15. *Dada una esfera cuyo diámetro es 7 y que circunscribe a un cubo, se quiere conocer la cantidad del lado del cubo*. Ésta es la recíproca de la precedente, pues tú tienes el diámetro de la esfera que es 7 y deseas conocer el lado del cubo. Sabes que la proporción de la potencia del diámetro de la esfera con respecto a la potencia del lado del cubo es como 3 a 1. Tienes que la potencia del diámetro, que es 7, es igual a 49, es decir 7 multiplicado por sí mismo. Entonces di: “si 3 fuera 49, ¿qué sería 1?”. Multiplica 1 por 49 y da 49; divide por 3 y resulta 16 $\frac{1}{3}$. Tal es la potencia del lado del cubo; de manera que el lado del cubo es raíz de 16 $\frac{1}{3}$; pues, como dije, la potencia del diámetro de la esfera es triple con respecto a la potencia del lado del cubo.



CASO 16. *Se quiere conocer la cantidad de la superficie del cubo circunscrito por una esfera cuyo diámetro es igual a* 7. Halla antes la potencia del diámetro de la esfera que contiene al cubo. Ésta es igual a 49; y por la precedente, tienes que la potencia del diámetro de la esfera con respecto a la potencia del lado del cubo contenido por ella es como 3 a 1; entonces la potencia del lado del cubo es $\frac{1}{3}$ de la potencia del diámetro de las esferas, vale decir, $\frac{1}{3}$ de 49; es decir que la potencia del lado del cubo es 16 $\frac{1}{3}$ que es [la superficie de] una cara. Ahora bien, tú deseas [la superficie de] seis caras, multiplica 6 por 16 $\frac{1}{3}$ y da 98; tal es la superficie del cubo a que nos hemos referido. Esto puede obtenerse de otra manera; es decir, tú tienes que se ha dicho que la potencia del diámetro de la esfera es a la superficie del cubo como 1 es a 2; entonces la superficie del cubo es doble con respecto a la potencia del diámetro de la esfera que lo contiene, potencia que es igual a 49. Esto duplícalo y dará 98, como arriba.

CASO 17. *Siendo 4 cada lado del cubo* abcdefgh, *queremos hallar cuál será su cuadratura*. Hemos dicho, cuando entramos a tratar de los cuadrados, que su cuadratura se obtenía de sus lados, es decir elevando al cubo uno de sus lados Por tanto multiplica por sí mismo su lado, que es igual a 4, y da 16; 4 por 16 da 64. Entonces dirás que la cuadratura del cubo *abcdefgh*, cuyo lado es 4, es igual a 64.

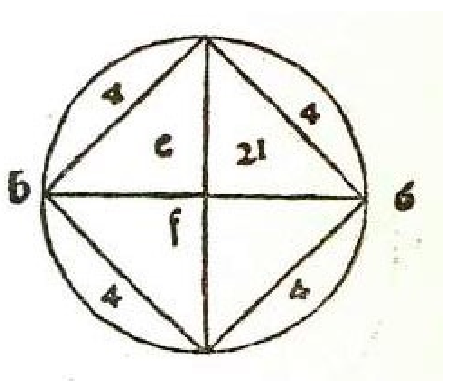
CASO 18. *Hallar el lado del cubo* abcdefgh, *cuya cuadratura es 100*. Esto se halla fácilmente, pues, en toda cuadratura de un cubo, su raíz cúbica es el lado del cubo. Por lo tanto el lado de dicho cubo es la raíz cúbica de 100.

CASO 19. *Dado el cubo* abcdefgh, *cuya cuadratura es igual a 100, hallar la cantidad del diámetro de la esfera que lo circunscribe*. Tú tienes arriba que cuando la cuadratura del cubo es igual a 100, su lado es raíz cúbica de 100. Se ha dicho

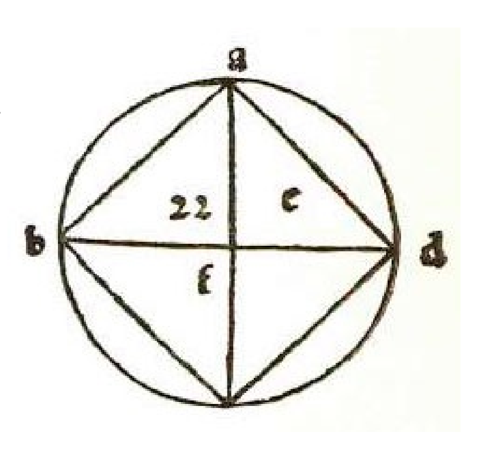
también que la potencia del diámetro de la esfera es triple con respecto a la [del lado] del cubo contenido por dicha esfera. Entonces el lado del cubo es raíz cúbica de 100 y su potencia es raíz cúbica de 10.000. Tú deseas tener 3 veces esta cantidad; por lo tanto eleva al cubo 3 y te da 27; multiplica 27 por 10.000 y da 270.000 que es igual a tres veces la potencia de un lado, es decir a la potencia del diámetro de la esfera que circunscribe al cubo. Así, pues, la potencia del diámetro de la esfera es raíz cúbica de 270.000. Entonces di que el diámetro de la esfera que contiene dicho cubo es raíz de la raíz cúbica de 270.000, que es lo que se busca.

El cuerpo de ocho bases triangulares es el tercer cuerpo regular que la esfera circunscribe, tocando con la circunferencia todos sus ángulos. La potencia de su lado con respecto a la potencia del diámetro de la esfera que lo circunscribe es como 1 a 2; y sus lados se obtienen mediante el diámetro y el diámetro mediante el lado. Por medio del lado se obtiene el cateto y la superficie; y por medio del lado y del diámetro se obtiene su cuadratura, como puede verse en los ejemplos.

CASO 20. *Dado el cuerpo de ocho bases triangulares equilátero cuyo lado es igual a 4, hallar el diámetro de la esfera que lo circunscribe*. Tú tienes el cuerpo de ocho bases triangulares equilátero *abcdef*, que tiene ocho bases, doce lados y seis ángulos; y se ha dicho que su lado es igual a 4. La potencia del diámetro de la esfera que lo circunscribe es doble con respecto a la potencia del lado. Por tanto multiplica 4, que es el lado, por sí mismo y da 16, que es la potencia del lado; y si la potencia del diámetro de las esferas es doble, ella será 32. La raíz de 32 es el diámetro de la esfera que contiene a dicho cuerpo de ocho bases, cuyo lado es igual a 4.



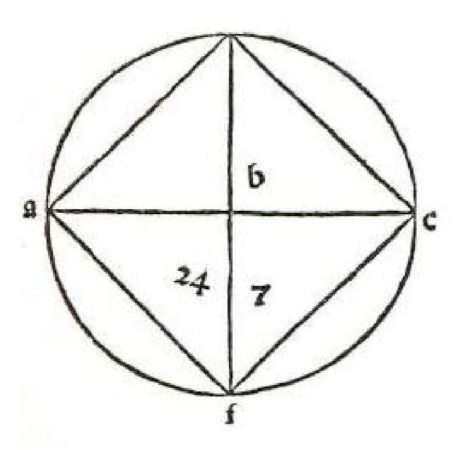
CASO 21. *Dado un cuerpo de ocho bases circunscrito por una esfera cuyo diámetro es 7, hallar la cantidad de su lado.* ℞ Como la potencia del diámetro de la esfera es doble con respecto a la potencia del lado del cuerpo de ocho bases circunscrito por aquélla, por lo tanto multiplica 7 por sí mismo y da 49, que es la potencia del diámetro. Luego divide 49 en dos partes iguales, y resulta 24 ½. La raíz de 24 ½ es el lado del cuerpo de ocho bases triangulares inscrito en la esfera cuyo diámetro es 7. Esto se prueba por la decimoquinta[116] del decimotercero de EUCLIDES.



CASO 22. *Dado el cuerpo de ocho bases triangulares equilátero cuyo lado es igual a 4, se quiere hallar la cantidad de la superficie.* ℞ Tú tienes por la segunda del primero que cuando el lado del triángulo equilátero es igual a 4, el cateto de dicho triángulo es raíz de 12 y tienes por la misma que multiplicando el cateto por la mitad de la base se obtiene la superficie del triángulo. Entonces, multiplicando el cateto por ocho semibases resultarán ocho triángulos correspondientes a la superficie del cuerpo de ocho bases. Por tanto, toma la mitad de ocho lados del cuerpo de ocho bases; siendo cada lado igual a 4, ocho serán iguales a 32. Toma la mitad, es decir 16, y esta cantidad serán las ocho semibases. Ahora bien, hay que elevar al cuadrado 16 y multiplicarlo por el cateto, que es raíz de 12; entonces 16 por sí mismo da 256; multiplica esto por 12 y da 3072. La raíz de 3072 será la superficie del cuerpo de ocho bases que dijimos.

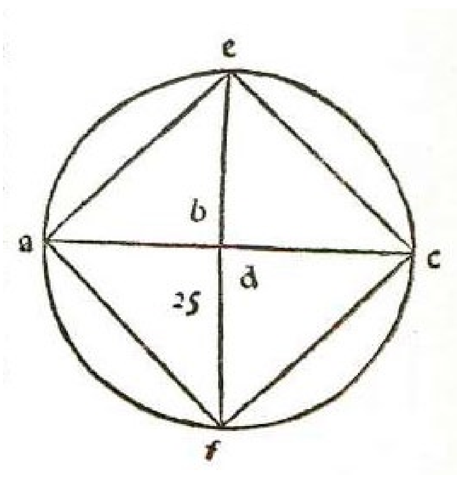
CASO 23. *Dado el cuerpo de ocho bases triangulares contenidos por la esfera cuyo diámetro es igual a 7, hallar la cudratura de*

dicho cuerpo. ℜ Tú tienes por la vigesimoprimera de este tratado que el lado de dicho cuerpo de ocho bases es raíz cuadrada de 24 ½. Multiplica esta cantidad por sí misma y da 24 ½, que es base entre dos pirámides, siendo una *abcde* y la otra *abcdf*. El diámetro de la esfera es *ef* y es igual a 7. Multiplica por tanto 7 por 24 ½ y da 171 ½. EUCLIDES en la novena[117] del decimosegundo demuestra que en toda columna redonda la pirámide redonda correspondiente es ½ de dicha columna, y lo mismo dígase de toda pirámide con respecto a su cilindro. Demostración: tú tienes el cubo *abcdefgh*, cuyo centro es *k*. Si trazas desde *k* a cada ángulo [una línea], se formarán seis pirámides, y será cada una igual a un sexto de la cuadratura del cubo. Ahora bien, divide en dos partes iguales dicho cubo, dividiendo *a, e, b* y *f*, con una línea que pase por la cual cortará *cg* y *dh* en partes iguales. De esta manera el cubo estará dividido en dos partes iguales a *abedlmno*. Digo que la pirámide *abcdk* es un sexto de todo el cubo y un tercio de la mitad, es decir de *abcdlmno*, y por tanto está claro que en toda figura corpórea de líneas equidistantes, la pirámide correspondiente es un tercio de su cuadratura. Ahora bien, tú tienes 171 ½, pues, multiplicando el cateto, es decir, el eje por la superficie de la base, da 171 ½; toma de esta cantidad la tercera parte que será 57 ⅙. Por tanto la cuadratura de dicho cuerpo de ocho bases es igual a 57 ⅙.

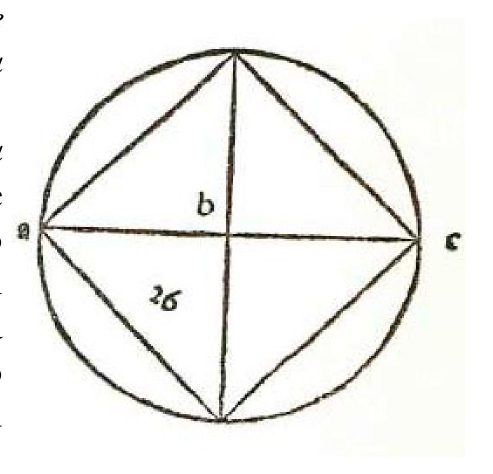


CASO 24. *Dado el cuerpo de ocho bases cuya superficie es igual a 100, se quiere hallar el diámetro de la esfera que lo contiene*. ℜ Procede así: tú sabes que el cuerpo de ocho bases tiene ocho triángulos equiláteros; entonces, haz 8 partes de 100; cada parte

será 12 ½. Luego di: "dado un triángulo cuya superficie es 12 ½, ¿cuál será su lado?". Supón que un lado sea 1 *cosa*; halla el cateto de esta manera: multiplica 1 *cosa* por sí misma y da 1 *censo*; luego multiplica medio lado por sí mismo, es decir ½ *cosa*, y da ¼ de *censo*; réstalo de 1 *censo* y queda ¾ de *censo*. Esto multiplícalo por la mitad del lado elevada al cuadrado. Es decir, por ¼ de *censo* y da 3/16 de *censo de censo*, que es igual a 12 ½. Eleva al cuadrado 12 ½ y da 156 ¼; divide por 3/16 de *censo de censo* y resulta raíz de la raíz de 833 ⅓. Tal es el lado de dicho cuerpo de ocho bases, es decir raíz de la raíz de 833 ⅓, y su potencia es raíz de 833 ⅓; y la potencia del diámetro de la esfera que contiene al cuerpo de ocho bases es dos veces tal cantidad; por tanto multiplica por dos al cuadrado y tendrás 3333 ⅓ que es la potencia del diámetro. Entonces, el diámetro de la esfera, que buscamos, es raíz de la raíz de 3333 ⅓.



CASO 25. *Dado el cuerpo de ocho bases triangulares cuya cuadratura es igual a 400, hallar el diámetro de la esfera que lo contiene*. ℜ Procede así: halla una esfera cuyo diámetro sea conocido y sea tal diámetro 7. Por la vigesimotercera de este tratado se tiene como cuadratura del cuerpo de ocho bases 57 ⅙.



Eleva al cubo 7 y dará 343. Por tanto di así: "si 57 $\frac{1}{6}$ de cuadratura da como diámetro 343, ¿qué dará 400 de cuadratura?". Multiplica 343 por 400 y da 137.200. Divide esto por 57 $\frac{1}{6}$ y resulta 2400. La raíz cúbica de 2400 es el diámetro de la esfera que circunscribe al cuerpo de ocho bases cuya cuadratura es igual a 400.

✠ El cuerpo de doce bases pentagonales es el cuarto cuerpo regular que la esfera circunscribe. Dicho cuerpo tiene 12 bases, todas pentagonales, y puede dividirse en sesenta triángulos. Su superficie se obtiene de los lados de las bases, y de la línea opuesta al ángulo pentagonal de una base, y también del diámetro del círculo que circunscribe dicha base. De la misma manera, con esos elementos y con el diámetro de la esfera se obtiene la cuadratura.

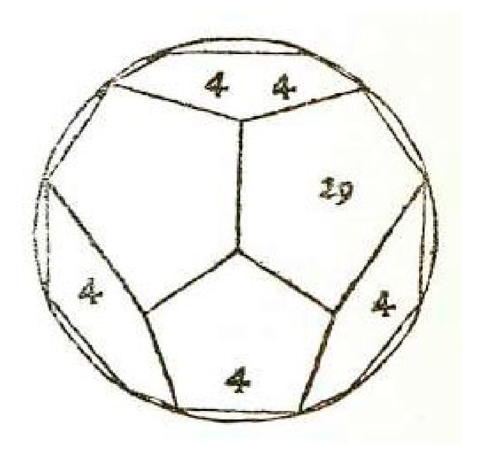
CASO 26. *Dado el cuerpo de doce bases pentagonales cuyos lados son igual a 4, hallar el diámetro de la esfera que lo contiene*. ✠ EUCLIDES en la última del decimotercero dice que si se divide el lado del cubo inscrito en la esfera según la proporción que tiene el medio y dos extremos, su parte mayor es el lado del cuerpo de doce bases pentagonales. Ahora bien, nosotros no tenemos el lado del cubo, ni el diametro de la esfera, pero tenemos la parte mayor del lado del cubo, que es igual a 4 y es el lado del cuerpo de doce bases. Di por tanto que el lado del cubo es 4 más 1 *cosa*; multiplica 1 *cosa* por 4 más 1 *cosa*, da 4 *cosas* más 1 *censo*; luego multiplica 4 por sí mismo y da 16. Tú tienes que 16 es igual a 4 *cosas* más 1 *censo*; divide por mitad las *cosas* y tendrás 2; multiplica esto por sí mismo y da 4; agrégalo al número, es decir, a 16 y da 20. Raíz de 20 menos 2 es la *cosa* que sumada a 4 da raíz de 20 más 2. Esto es el lado del cubo. Ahora bien, se ha dicho aquí, en la primera [del cubo] que la potencia del diámetro de la esfera es tres veces la potencia del cubo; y tú tienes que el lado del cubo es igual a raíz de 20 más 2; multiplícalo por sí mismo y da 24 más raíz de 320; multiplica esto por 3 y da 72 más raíz de 2880. De esta manera puedes afirmar que la potencia del diámetro de la esfera que

circunscribe el cuerpo de doce bases pentagonales es igual a 72 más raíz de 2880; cuando el lado del cuerpo de doce bases es igual a 4.

CASO 27. *Dado el cuerpo de doce bases pentagonales inscrito en la esfera cuyo diámetro es raíz de 48, hallar cuál es el lado de sus bases.* ℜ Se ha dicho en la precedente que para un cubo inscrito en la misma esfera junto con un cuerpo de doce bases, si se divide su lado según la proporción que tiene el medio y dos extremos, la parte mayor es el lado del cuerpo de doce bases pentagonales inscrito en esa esfera. Ahora bien, tú sabes que el diámetro de la esfera es la raíz de 48 y que [su potencia] es triple con respecto a la potencia del lado del cubo. Divide entonces 48 por 3 y resulta 16. Esta cantidad es la potencia del cubo, mejor dicho, de su lado, que por tanto es igual a 4; divide entonces 4 según la proporción que tiene el medio y dos extremos. Por lo tanto, [supón que] una parte sea 1 *cosa* y que ésta sea la mayor y que la parte menor sea igual a 4 menos 1 *cosa*; multiplica 1 *cosa* por sí misma y da 1 *censo*; multiplica 4 menos 1 *cosa* por 4 y da 16 menos 4 *cosas*. Tú tienes entonces que 1 *censo* es igual a 16 menos 4 *cosas*. Restaura las partes y tendrás que 1 *censo* más 4 *cosas* es igual a 16. Divide por mitad las *cosas* y tendrás 2; multiplica por sí mismo y da 4; agrega el número, 16, y da 20. Raíz de 20 menos 2 es la *cosa* que tomamos como parte mayor. Entonces el lado del cuerpo de doce bases pentagonales es raíz de 20 menos 2, estando dicho cuerpo circunscrito por una esfera cuyo diámetro es raíz de 48. Pero en el caso de que la potencia del cubo fuera un número que no tuviese raíz discreta, habría que proceder por medio de la proporción. Es decir, si el diámetro de la esfera fuera raíz de 51, el lado del cubo sería raíz 17. Por tanto dirás: "si 16 me da raíz de 20 menos 2, todo al cuadrado, es decir, 24 menos raíz de 320, ¿qué me dará 17?". Multiplica 17 por 24 y da 408; divide por 16 y da 25 ½; luego eleva al cuadrado 17 y da 289, que multiplicado por 320 da

92.480; esto divídelo por el cuadrado de 16, es decir, por 256 y resulta 361 ¼. Entonces dirás que el lado del cuerpo de doce bases pentagonales inscrito en la esfera cuyo diámetro al cuadrado es igual a 51, es igual a 25 ½ menos raíz de 361 ¼; mejor dicho, esto es la potencia del lado de la base, que es lo que nos proponíamos.

CASO 28. *Hallar la superficie de un cuerpo de doce bases pentagonales equilátero cuyo lado es igual a 4.* ℜ Tú tienes que en el cuerpo de doce bases pentagonales, cada base es pentagonal; y se ha dicho que el lado de cada base es igual a 4. Tú quieres conocer la superficie de estas doce bases. Halla primero la superficie de una de ellas. Tú tienes por la novena del decimocuarto de EUCLIDES que 74 del diámetro del círculo que circunscribe a la base pentagonal, multiplicados por ⅚ de la línea opuesta al ángulo pentagonal, es igual, según se demuestra, a la superficie del pentágono. Ahora bien, yo me encuentro con que multiplicando ⅛ del diámetro por toda la línea opuesta al ángulo pentagónico da lo mismo[118] que multiplicando los ¾ por los ⅚. Por tanto tomaré el [procedimiento] de los ⅝ del diámetro multiplicados por la línea opuesta al ángulo pentagonal, por ser más fácil. Tomo entonces un pentágono tal que se conozca el diámetro del círculo que lo circunscribe. Supongamos que el diámetro del círculo sea igual a 4; esto da, como potencia del lado del pentágono, 10 menos raíz de 20; y la potencia del diámetro del círculo que lo contiene es 16. Toma ⅝ de 16, es decir, 6 ¼; diremos ahora así: “si 10 menos raíz de 20 me da 6 ¼, ¿qué me



dará 4?”. Eleva 4 al cuadrado y da 16; multiplica 6 ¼ por 16 y da 100 y esto divídelo por 10 menos raíz de 20. Halla el divisor de esta manera: multiplica 10 menos raíz de 20 por 10 más raíz de 20 y da 80, que es el divisor. Multiplica 10 por 100 y da 1.000, divide por 80 y da 12 ½, luego eleva 100 al cuadrado y da 10.000; multiplica por 20 y da 200.000 y eleva al cuadrado el divisor que es 80 y da 6400; divide 200.000 [por esa cifra] y resulta 31 ¼. Tienes entonces, para los ⅝ [que dijimos], 12 ½ más raíz de 31 ¼. Ahora halla la línea opuesta al ángulo pentagonal, y encontrarás que es igual a raíz de 20 más 2; eleva esto al cuadrado y dará 24 más raíz de 320; esto multiplícalo por 12 ½ más raíz de 31 ¼, que son los ⅝ del diámetro del círculo de la base, y da 400 más raíz de 50.000 y raíz de 18.000. Sumadas estas dos raíces da raíz de 128.000. La raíz de tal suma, es decir, raíz de 128.000 más 400, es la superficie de una base. Tú deseas tener 12 de ellas; eleva 12 al cuadrado y da 144, esto multiplícalo por 400 y da 57.600; luego eleva al cuadrado 144 y da 20.736; esto multiplícalo por 128.000 y da raíz de 2.654.208.000. La raíz de la suma de la raíz de 2.654.208.000 más 57.600 es la superficie del cuerpo de doce bases pentagonales, siendo el lado de sus bases igual a 4. Y esto es lo que se deseaba saber.

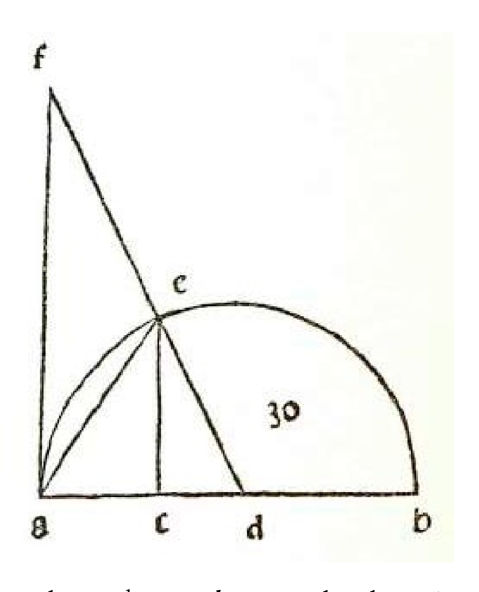
CASO 29. *Dado el cuerpo de doce bases pentagonales cuyo lado es igual a 4, hallar su cuadratura*. Procede así: halla el diámetro de la esfera que lo circunscribe de la manera siguiente. Tú tienes, por la precedente, que la línea opuesta al ángulo pentagonal es raíz de 20 más 2; eleva al cuadrado y da 24 más raíz de 320, que es la potencia de la línea opuesta al ángulo pentagonal y que es igual a la potencia [del lado] del cubo inscrito en esa misma esfera. Ahora bien, por la última del decimotercero de EUCLIDES, tienes que la potencia del diámetro de la esfera es triple con respecto a la potencia del lado del cubo

inscrito en dicha esfera; y la potencia del lado del cubo se ha dicho que es igual a 24 más raíz de 320. Esta potencia multiplícala por 3 y da 72 más raíz de 2880; tal es la potencia del diámetro de la esfera. Luego halla el diámetro de un círculo en que está inscrita una de las doce bases pentagonales de la manera que se dijo para el lado del pentágono cuya potencia era 16. Se ha dicho que su potencia era 32 más raíz de 204 ⁴⁄₅; réstala de la potencia del diámetro de la esfera, es decir de 72 más raíz de 2880, y queda 40 más raíz de 1548 ⁴⁄₅. Ahora divídelo en dos partes iguales y resulta 10 más raíz de 96 ⁴⁄₅. Por la precedente tienes que la superficie de dicho cuerpo de doce bases es la raíz de la suma de raíz de 2.654.208.000 más 57.600; de ella toma ⅓; esto será igual a 6400 más raíz de 32.768.000. Esto multiplícalo por 10 más raíz de 96 ⁴⁄₅. Multiplica, por tanto, 10 por 6400 y da 64.000. Tenlo presente. Luego eleva al cuadrado 10 y da 100; multiplica por 32.768.000 y da 3.276.800.000; luego eleva al cuadrado 6400 y da 40.960.000; esto multiplícalo por 96 ⁴⁄₅ y da 3.964.928.000; luego multiplica 96 ⁴⁄₅ por 32.768.000 y da 3.171.942.400. De esta manera tienes que la cuadratura del cuerpo de doce bases pentagonales, en que el lado de cada base es igual a 4, es igual a la raíz de la suma de estas tres raíces, es decir raíz de 3.276.800.000 más raíz de 3.964.928.000 más raíz de 3.171.942.400, todo esto más 64.000. Esto es lo que nos habíamos propuesto.

El quinto cuerpo regular circunscrito por la esfera es el cuerpo de veinte bases triangulares equilátero, cuyos lados se obtienen de la esfera, mejor dicho, del diámetro de la esfera que lo circunscribe. Mediante el lado se obtiene el diámetro de la esfera y también la superficie del cuerpo; y mediante el diámetro, el lado y la superficie se obtiene su cuadratura.

CASO 30. *Dado el cuerpo de veinte bases contenido por la esfera cuyo diámetro es igual a 12 se quiere hallar su lado.* Conforme a la última del decimotercero de EUCLIDES, traza una línea *ab* de longitud igual al diámetro de la esfera, que se ha dicho ser igual a 12. Divide tal línea en partes iguales en el punto *d* y traza el semicírculo correspondiente a la línea *ab* y sea tal círculo *aeb*. Sobre *a* levanta la perpendicular *fa* igual a *ab* y del punto *f* tira *fd* que cortará el semicírculo *aeb* en el punto *e*. Desde el punto *e* conduce la perpendicular sobre *ab*, cortándola en el punto *c*. Tendrás así dos triángulos semejantes *afd* y *ced*, pues el ángulo *a* del triángulo *af d* es recto y el ángulo *c* del triángulo *ced* es recto también, el ángulo *d* es común a ambos, y los lados de las bases están en proporción. Entonces necesariamente el ángulo *f* es igual al ángulo *e*, pues cada uno es opuesto a bases contenidas por dos ángulos iguales. Ahora bien, por la última del decimotercero de EUCLIDES, se demuestra que la línea *fd* divide el semicírculo *aeb* en un punto *e* [tal que] la línea *ae* es el lado del cuerpo de veinte bases triangulares inscrito en la misma esfera. Tú sabes que *af* es igual a *ab*, que es 12, y que *ad*, que es la mitad *ab*, es 6; ahora bien, como *fd* del triángulo *afd* es opuesto al ángulo *a* que es recto, su cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de las dos líneas *fa* y *ad*; la potencia de *af* es 144, la potencia de *ad* es 36, y ambas,

sumadas, dan 180. La raíz de 180 es *fd*, que es 5 veces la potencia de *ad*, esto es, 36. Las dos potencias, sumadas, dan 180 y la raíz de 180 es *fd* que es cinco veces la potencia de *ad* que es 36. La proporción que hay de *fd* a *ad* es la misma que la que hay de *ed* a *cd*. Ahora bien, *ed* es igual a *ad*, que es igual a 6, por ser semidiámetro, y su potencia es igual a 36, y es cinco veces la potencia de *cd*.



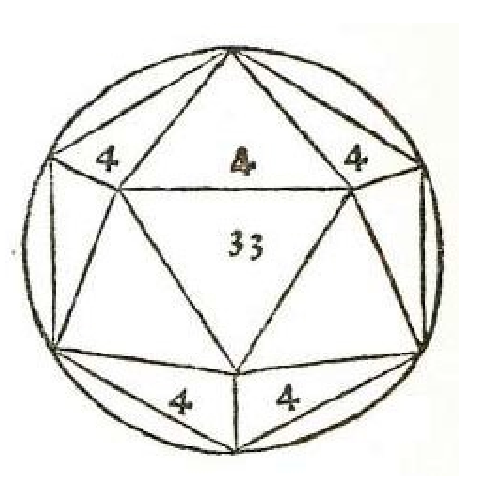
Entonces, la potencia de *cd* es igual a $7\frac{1}{5}$ y *cd es* igual a la raíz de $7\frac{1}{5}$. La potencia de *ce es* igual a $28\frac{4}{5}$ que es el resto hasta 36, de manera que *ce es* igual a raíz de $28\frac{4}{5}$. Tú deseas conocer *ae*, cuyo cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de *ac* y *ce*. Así, pues, multiplica *ac* de esta manera: multiplica por sí mismo 6 menos raíz de $7\frac{1}{5}$ y da $43\frac{1}{5}$ menos raíz de $1036\frac{4}{5}$. Esto súmalo a la potencia de *ce*, que es igual a $28\frac{4}{5}$; y da 72 menos raíz de $1036\frac{4}{5}$. Por lo tanto di que el lado del cuerpo de veinte bases inscrito en la esfera cuyo diámetro es 12, es la raíz de 72 menos raíz de $1036\frac{4}{5}$.

CASO 31. *Dado el cuerpo de veinte bases triangulares equilátero en el cual el lado de una base es igual a 4, hallar el diámetro de la esfera que lo contiene*. Procede así: traza una línea, y sea esta *ab*; divídela en partes iguales en el punto *d* y tomando *d* como centro describe el semicírculo *aeb*, y sobre *a* traza la perpendicular *fa* igual a *ab*; luego conduce *fd* que cortará la circunferencia *aeb* en el punto *e* y, por fin, la línea *ae*, que será igual a 4 y que por la precedente es el lado del cuerpo de veinte bases triangulares inscrito en esa misma esfera. Luego traza la

línea *eb*. Digo que *ae* y *eb*, unidas en una sola línea, forman una línea dividida en el punto *e* según la proporción que tiene el medio y dos extremos, siendo la parte mayor *eb* y la menor *ae*, igual a 4, que es el lado del cuerpo de veinte bases triangulares. Ahora bien, por la penúltima del primero de EUCLIDES se demuestra que la potencia de la base de un triángulo opuesta al ángulo recto es igual a la suma de las potencias de las dos líneas que contienen el ángulo recto. Pues bien, como debemos dividir la línea compuesta, según la proporción que tiene el medio y dos extremos, siendo la parte menor igual a 4, di que la parte mayor es 1 *cosa*, y que toda la línea es 1 *cosa* más 4. Multiplica 1 *cosa* por sí misma y da un *censo*; multiplica 4 por 1 *cosa* más 4 y da 4 *cosas* más 16. Divide las *cosas* y tendrás 2; multiplica esto por sí mismo y da 4; súmalo a 16 y da 20. Raíz de 20 más 2, que es el resultado de la división de las *cosas*, es igual a la *cosa* que es *eb*. Entonces *eb*, es raíz de 20 más 2 y *ae* es 4, cuya potencia es igual a 16. Multiplica raíz de 20 más 2 por raíz de 20 más 2 y da 24 más raíz de 320; súmale la potencia de *ae* que es 16 y da 40 más raíz de 320. Tal es la potencia de *ab*, que es diámetro de la esfera que contiene el cuerpo de veinte bases triangulares equilátero, es decir que la raíz de la suma de raíz de 320 más 40 es el diámetro de la esfera; y esto es lo que queríamos saber.

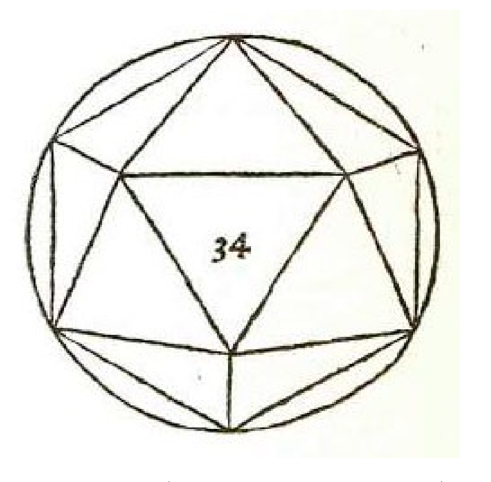
CASO 32. *Hallar la superficie del cuerpo de veinte bases triangulares equilátero cuyo lado es igual a 4.* ℜ Tú sabes que cada base del cuerpo de veinte bases triangulares equilátero tiene su lado igual a 4, y que para hallar su superficie hay que hallar el cateto de una de las bases. Por la primera del primero tienes que el cateto de dicho triángulo es igual a raíz de 12, y se ha dicho que multiplicando el cateto por la mitad de la base resulta la superficie de todo el triángulo que es una de las veinte bases del cuerpo propuesto. Ahora bien, tú deseas conocer la superficie de todo el cuerpo de veinte bases; toma entonces la mitad de las

veinte bases, es decir 10 y como sabes que cada una tiene el lado igual a 4, tendrás 40; eleva esta cantidad al cuadrado y da 1600. Como [cada base] debes multiplicarla por raíz de 12, multiplica 12 por 1600, lo cual da 19.200, y la raíz de 19.200 es la superficie del cuerpo de veinte bases triangulares cuyo lado es igual a 4.



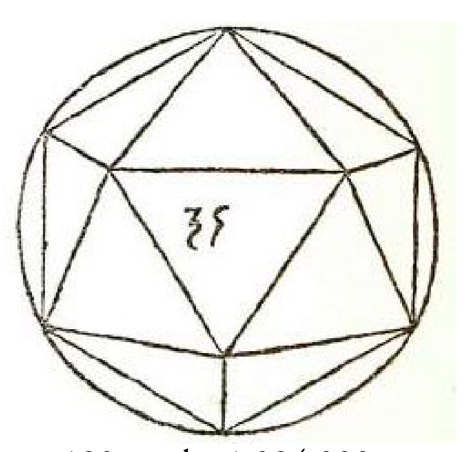
CASO 33. *Dado el cuerpo de veinte bases triangulares equilátero cuya superficie es igual a 200 hallar la cantidad de su lado.*

Por la precedente se ha dicho que si el lado de una base es igual a 4, el cateto es igual a raíz de 12, y la superficie de dicha base es raíz de 48 tal como tienes en la segunda del primero. Ahora bien, tú tienes que la superficie del cuerpo de veinte bases es igual a 200. Por tanto divide 200 por 20 y resulta 10, siendo ésta la superficie de una base, es decir, raíz de 100, y como la proporción de una superficie a otra es doble con respecto a la proporción del lado de una superficie al lado de otra superficie, cuando éstas son semejantes, por eso di: "si raíz de 48, como superficie, da 4, como lado, ¿qué dará 10, como superficie?". Eleva al cuadrado del cuadrado 4 y da 256; luego eleva 10 al cuadrado y da 100; multiplica 100 por 256 y da 25.600; esto divídelo por 48 y resulta 533 $\frac{1}{3}$. La raíz de la raíz de 533 $\frac{1}{3}$ será



el lado del cuerpo de veinte bases triangulares equiláteras, cuya superficie es igual a 200.

CASO 34. *Dado el cuerpo de veinte bases triangulares equilátero cuya superficie es igual a 200 hallar el diámetro de la esfera que lo contiene*. Tú tienes por la precedente que el cuerpo de veinte bases cuya superficie es igual a 200 tiene su lado igual a la raíz de la raíz de 533 $\frac{1}{3}$; y por la trigésimo primera del segundo tienes que para el cuerpo de veinte bases cuyo lado es igual a 4 el diámetro es igual a 40 más raíz de 320. Ahora bien, como el lado es raíz de raíz, por lo tanto eleva 4 al cuadrado del cuadrado y da 256. Eleva también al cuadrado 40 más raíz de 320 y da 1920 más raíz de 512.400. Tienes entonces 120 más raíz de 512.400. Ahora bien, di así: "256 de lado da como diámetro 120 más raíz de 512.400, ¿qué dará 533 $\frac{1}{3}$?". Multiplica 533 $\frac{1}{3}$ por 120 y da 1.024.000; esto divídelo por 256 y resulta 4000. Luego eleva al cuadrado 533 $\frac{1}{3}$ y da 284.444 $\frac{4}{9}$, multiplica por 512.400 y da 145.749.333.333 $\frac{1}{3}$; esto divídelo por 256 elevado al cuadrado, es decir por 65.536 y resulta 2.223.958 $\frac{256}{758}$. Tú tienes entonces 4000 más raíz de 2.223.958 $\frac{256}{758}$. Di entonces que el diámetro o eje de la esfera que circunscribe el cuerpo de veinte bases triangulares equilátero, cuya superficie es igual a 200, es la raíz de la raíz de la suma de raíz de 2.223.958 $\frac{256}{758}$ más 4000.

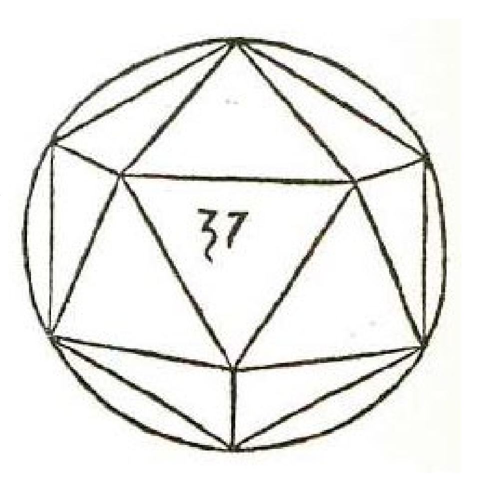


CASO 35. *Dado el cuerpo de veinte bases triangulares equilátero cuyo lado es igual a 4 halla su cuadratura*. Tú tienes por la trigésimo primera del segundo que, si el cuerpo de veinte bases triangulares tiene el lado igual a 4, el diámetro de la esfera que

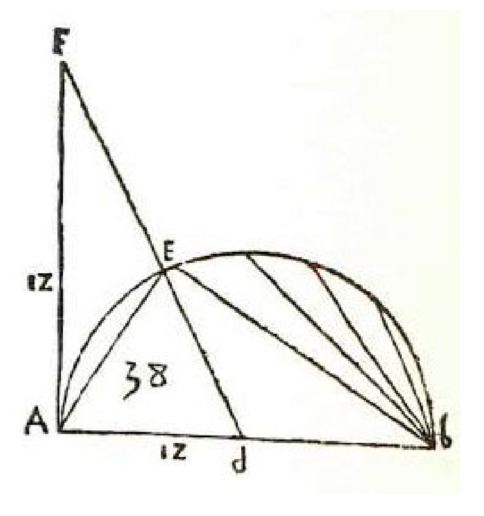
lo contiene es igual a la raíz de la suma de la raíz de 320 más 40. Divide entonces en dos partes iguales 40 más raíz de 320. Haz de esta manera: eleva al cuadrado 2 y da 4; divide 40 por 4 y resulta 10. Ahora bien, tú tienes 10 más raíz de 20 que es la mitad del diámetro de la esfera, mejor dicho, la potencia de la mitad del diámetro. Luego halla el cateto de una base del cuerpo de veinte bases cuyo lado es igual a 4. Pues bien, por la primera del primero tienes que el cateto es igual a raíz de 12; halla su centro, que está en los $\frac{2}{3}$ de dicho cateto; luego multiplica $\frac{2}{3}$ por sí mismo y da $\frac{4}{9}$; esto multiplícalo por 12 y da 48; divide por 9 y da 5 $\frac{2}{3}$ que es raíz de los dos tercios de la raíz de 12; réstalo de 10 y queda 4 $\frac{2}{3}$ más raíz de 20; esto multiplícalo por la superficie del cuerpo de veinte bases, que según la trigésimo tercera del segundo es igual a raíz de 19.200; de esta cantidad toma $\frac{1}{3}$ elevado al cuadrado: eleva 3 al cuadrado y da 9; divide 19.200 por 9 y resulta 2133 $\frac{1}{3}$; esto multiplícalo por 4 $\frac{2}{3}$ y da 9955 $\frac{5}{9}$; luego eleva al cuadrado 2133 $\frac{1}{3}$ y da 455.106 $\frac{1}{9}$; esto[119] multiplícalo por 20 y da 91.022.222 $\frac{2}{9}$. Di entonces que la cuadratura del cuerpo de veinte bases triangulares equilátero en el cual el lado de las bases es igual a 4, es igual a la raíz de la suma de la raíz de 91.022.222 $\frac{2}{9}$ más 9955 $\frac{5}{9}$, que es lo que buscábamos.

CASO 36. *Dado el cuerpo de veinte bases triangulares equilátero, cuya cuadratura es igual a 400, hallar la cantidad del lado de su base*. ❦ Por la precedente tienes que el lado del cuerpo de veinte bases, igual a 4, da como cuadratura de dicho cuerpo la raíz de la suma de la raíz de 91.022.222 $\frac{2}{9}$ más 9955 $\frac{5}{9}$. Entonces si 9955 $\frac{5}{9}$ más raíz de 91.022.222 $\frac{2}{9}$ de cuadratura da 16 para el lado, eleva al cubo esta cantidad, lo que dará 4096, y di así: “si 9955 $\frac{5}{9}$ más raíz de 91.022.222 $\frac{2}{9}$ de cuadratura da 4096 de lado, ¿qué dará 400 de cuadratura?”. Eleva al cuadrado esta cifra y da 160.000; esto multiplícalo por 4096 y da

655.360.000; divide por 9955 $\frac{5}{9}$ más raíz de 91.022.222 $\frac{2}{9}$. Como se trata de un binomio, halla el divisor de esta manera: multiplica 9955 $\frac{5}{9}$ más raíz de 91.022.222 $\frac{2}{9}$ por 9955 $\frac{5}{9}$ menos raíz de 91.022.222 $\frac{2}{9}$ y da 8.090.864 $\frac{16}{81}$ que es el divisor; luego multiplica 9955 $\frac{5}{9}$ por 655.360.000, después de reducir a novenos, y da $\frac{628482304000000}{81}$; esto divídelo por 8.090.864 $\frac{16}{81}$; reduce a ochentaiunavos y da 655.360.000; divide por esta cifra 528.482.304.000.000 y resulta 806.400. Tenlo en cuenta. Ahora eleva al cuadrado 655 360.000 y da 4.294.967.297.600.000.000; esto multiplicado por 91.022.222 $\frac{2}{9}$, reduciendo antes a ochentaiunavos, y da 256.494.072.527.585.280.000.000.000.000; esto divídelo por 8.090.864 $\frac{16}{81}$ elevado al cuadrado, es decir por 429.496.729.600.000.000, y resulta 597.196.800.000. Entonces puedes decir que el cuerpo de veinte bases triangulares equilátero cuya cuadratura es igual a 400 tiene como lado la raíz de la raíz cúbica del resto que da 806.400 menos raíz de 597.196.800.000, es decir que el lado de su base es raíz de la raíz cúbica del resto de 806.400 menos la raíz de 597.196.800.000. Y esto es lo que nos propusimos.



Y ahora que hemos hablado de la cantidad de los lados, superficies y cuadraturas de los cinco cuerpos regulares contenidos por diversas esferas, creo conveniente hablar, en esta última parte del segundo tratado, de los lados de todos estos cuerpos, contenidos por una misma esfera. Sea, pues, la esfera cuyo eje es igual a 12. Ahora bien, como tienes en la última del decimotercero de EUCLIDES la demostración de que en la esfera donde están contenidos todos los cinco cuerpos regulares, representados por líneas, la potencia del lado del cuerpo de cuatro bases triangulares equilátero es sesquiáltera con respecto a la potencia del eje de la esfera que lo contiene, y como la potencia del eje es igual a 144, entonces la potencia del lado del cuerpo de cuatro bases triangulares es 96, es decir sesquiáltera. También por la última del decimotercero de EUCLIDES tienes que la potencia del eje de la esfera es el triple de la potencia del lado del cubo inscrito en ella; el lado del cubo será entonces raíz de 48. En cuanto al lado del cuerpo de ocho bases triangulares, tienes por la misma conclusión que la potencia del eje de la esfera que lo contiene es el doble de la potencia del lado del cuerpo de ocho bases; y como la potencia del eje es igual a 144, entonces la potencia del lado del cuerpo de ocho bases es igual a 72. En lo que respecta al lado del cuerpo de doce bases pentagonales inscrito en dicha esfera, se



demuestra en aquel lugar que dividiendo el lado del cubo inscrito en la misma esfera, según la proporción que tiene el medio y dos extremos, la parte mayor es el lado del cuerpo de doce bases pentagonales cuya potencia es igual a 72 menos raíz de 2880. Entonces la raíz de lo que queda de 72 restándole raíz de 2880 es el lado del cuerpo de doce bases pentagonales contenido por esa esfera cuyo eje es igual a 12.

Finalmente, en cuanto al cuerpo de veinte bases, tú tienes, por el trigésimo caso de este tratado, que su lado es igual a la raíz de lo que queda de 72 restándole raíz de 1036 $^4/_5$. De esta manera tienes los lados de los cinco cuerpos regulares contenidos por la esfera cuyo eje es igual a 12: el del cuerpo de cuatro bases es raíz de 96; para el cubo es raíz de 48; para el cuerpo de ocho bases es raíz de 72; para el de doce bases, raíz de lo que queda de 72 restándole 2880, y para el de veinte bases, raíz de lo que queda de 72 restándole raíz de 1036 $^4/_5$.

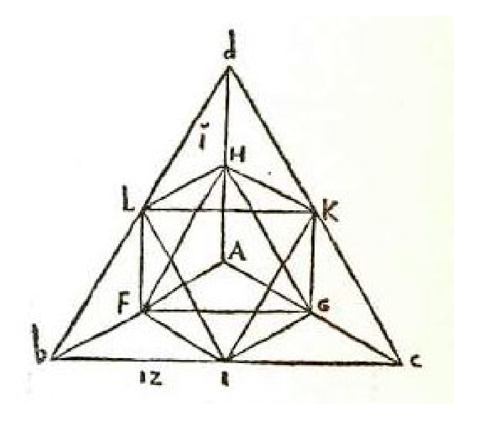
TRATADO TERCERO

Ahora, en este tercer tratado, tal como dije al principio del primero, hablaré de la cantidad de los lados de esos cuerpos, contenidos unos en otros, y cuántos caben en cada uno de ellos. Luego me referiré a la superficie y cuadratura de la esfera y a algunas divisiones de su eje, y a la superficie y cuadraturas hechas por una línea plana o sea línea superficial. También hablaré de la transformación de esferas en cubos y de cubos en esferas. Y así también de esferas en conos, es decir, en pirámides, y de conos en esferas.

Además de esto daremos el modo de hallar para un corte o casco esférico, conociendo su cuerda o sagita, la capacidad o área corporal. Y lo mismo para los cuerpos rectilíneos o uniformes y también para los cuerpos cuyas bases no son siempre equiláteras ni equiángulas, tal como las del cuerpo de setenta y dos bases, veinticuatro de las cuales son triangulares con dos lados iguales y el tercero desigual, cuarenta y ocho cuadrangulares con lados mayores y opuestos iguales, tal como en el lugar que le corresponde se habla extensamente, tratándose de una materia muy especulativa en la práctica [de las disciplinas matemáticas].

[I]

CASO 1. *Hallar el lado del cuerpo de ocho bases contenido por un cuerpo de cuatro bases triangulares equilátero cuyo lado es igual a 12.* Procede así: tú tienes el cuerpo de cuatro bases triangulares equilátero *abcd* cuyo lado es igual a 12; divide cada lado en partes iguales; *ab* en el punto *f, ac* en el punto *g, ad* en el punto *h*, y *be* en el punto *i, cd* en el punto *k* y *bd* en el punto *l*. Ahora bien, como se ha dicho que los lados son iguales, pues el cuerpo es equilátero, y que cada lado es igual a 12 y está dividido en partes iguales en los puntos *f, g, h, i, k, l*, cada parte será igual a 6. Éstas son *af, ag, ah*, [*bf, b i, bl, cl, cg, ck; dk, dh, dl*. Traza las líneas *fg, gh, hs*][120] *fi, ik, kg, gi, il, lf, kh, hl, lk*. Luego si se traza *fk* éste debe ser el diámetro de la esfera que circunscribe al cuerpo de ocho bases, pues pasa por el centro y termina en los ángulos opuestos *f* y *k*; traza luego *bn*, que es el cateto de la base *bcd* y que es igual a raíz de 108, y [traza también] el eje que cae desde el ángulo *a* sobre la línea *bn* en el punto *o* y que es igual a raíz de 96. Ahora halla el eje que cae desde el punto *f* sobre *bn* en el punto *m* y sea tal eje *fm*. La proporción de *bf* con respecto a *fm es* igual a la de *ab* con respecto a *ao*. Ahora bien, tú tienes que la potencia de *ab* es igual a 144 y que la de *ao* es 96, es decir sesquiáltera, conforme al primer caso del segundo. La potencia de *bf* es raíz de 36, réstale una tercera parte y da 24 que es la potencia de *fm*. La potencia de *bm* es igual a 12. Ahora bien, por la penúltima de



EUCLIDES, tienes que la potencia de *fk* es igual a la suma de las potencias de las dos líneas *fm* y *mk* La potencia de *fm* es igual a 24 y la de *mk* a 48; suma 48 más 24 y da 72 que es la potencia de *fk* que es el diámetro del cuerpo de ocho bases y de la esfera que lo circunscribe y que pasa por el centro y termina en los ángulos del cuerpo de ocho bases. Ahora bien, tú tienes que la potencia del diámetro es el doble de la potencia del lado del cuerpo de ocho bases contenido por el de cuatro bases; divide entonces 72 en dos partes iguales y da 36. Raíz de 36, es decir 6, es el lado del cuerpo de ocho bases triangulares contenido por el cuerpo de cuatro bases triangulares cuyos lados son iguales, cada uno, a 12.

CASO 2. *Dado un cubo cuyo lado es igual a 12 y un cuerpo de cuatro bases triangulares inscrito en él, se quiere hallar el lado de este cuerpo*. Tú tienes el cubo *abcdfghi*; traza las diagonales *ac, ag, cg, ai, ci*, y finalmente traza *ig*.

Ahora bien, cada lado del cubo es igual a 12, y, de acuerdo con la penúltima del primero de EUCLIDES, la potencia de la diagonal *ac* es igual a la suma de las potencias de *ab* y *bc*. Se ha dicho, además, que *ab* es igual a 12 y que también *bc* es igual a 12; multiplica por sí mismo *ab*, que es 12 y da 144; también *bc* multiplicado por sí mismo da 144; y estas cantidades sumadas dan 288. La raíz de 288 es *ac*, es decir uno de los lados del cuerpo de cuatro bases triangulares *acgi*. Entonces, dado el cuerpo de cuatro bases triangulares equilátero contenido por el cubo cuyo lado es igual a 12, el lado de dicho cuerpo de cuatro bases es raíz de 288, según queríamos.

CASO 3. *Dado el cuerpo de ocho bases triangulares equilátero contenido por el cubo cuyo lado es igual a 12, hallar el lado del cuerpo de ocho bases*. Tú tienes el cubo *abcdfghi*, que contiene un cuerpo de ocho bases triangulares equilátero y en el cual, por la precedente, has colocado un cuerpo de cuatro bases

triangulares cuyos lados son iguales, cada uno, a raíz de 288; por otra parte, por la primera de este tratado, tienes que, para colocar el cuerpo de ocho bases triangulares en el cuerpo de cuatro bases triangulares, se divide cada lado en partes iguales y la cantidad obtenida es el lado del cuerpo de ocho bases triangulares. Entonces, como hemos puesto en el cubo cuyo lado es igual a 12 un cuerpo de cuatro bases cuyo lado es igual a raíz de 288, por lo tanto, divide la raíz de 288 en partes iguales y resulta raíz de 72. La raíz de 72 es el lado del cuerpo de ocho bases triangulares equilátero contenido por el cubo cuyo lado es igual a 12. Y esto es lo que nos proponíamos.

CASO 4. *Dado el cubo cuyo lado es igual a 12 y que contiene un cuerpo de veinte bases triangulares equilátero, hallar el lado.* Debes saber que, para el lado de dicho cubo dividido según la proporción que tiene el medio y dos extremos, la parte mayor es el lado de la base del cuerpo de veinte bases construido en dicho cubo. Se dijo que el lado del cubo era 12; entonces haz de 12 dos partes tales que multiplicada la parte menor por el todo, es decir 12, dé tanto cuanto la parte mayor multiplicada por sí misma. Di entonces que una parte es 1 *cosa* y la otra 12 menos 1 *cosa*; y la mayor sea 1 *cosa*. Multiplica por sí misma 1 *cosa* y da 1 *censo*; luego multiplica 12 menos 1 *cosa* por 12 y da 144 menos 12 *cosas*.

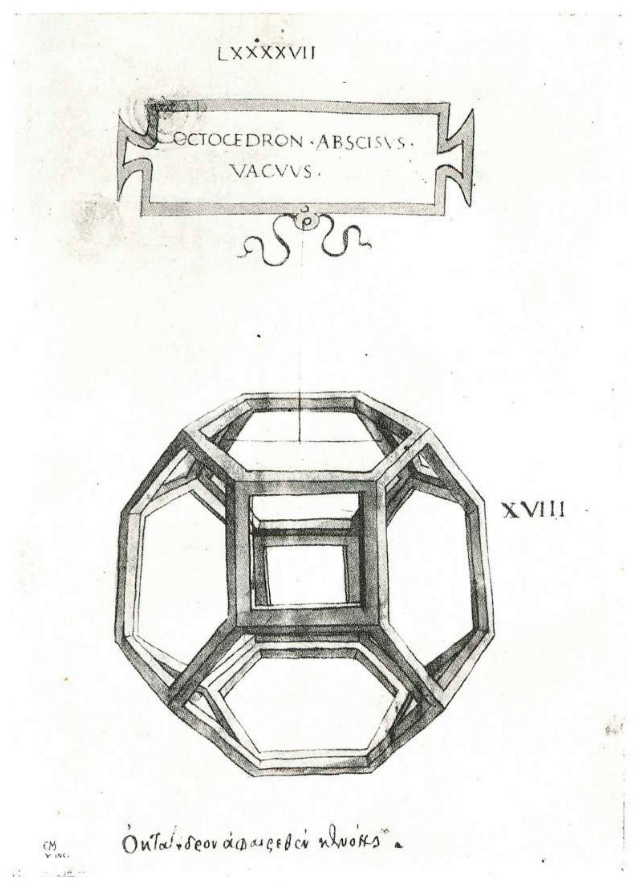


Ilustración del manuscrito de *La Divina Proporción*. Biblioteca de Ginebra.

Restaura las partes y tendrás que 1 *censo* más 12 *cosas* es igual a 144. Divide por mitad las *cosas* y tendrás 6; multiplica esto por sí mismo y da 36; agrégalo al número, que es 144, y da 180. La raíz de 180 menos 6 es la *cosa* que supusimos que era la parte mayor. Por lo tanto, di que el lado del cuerpo de veinte bases triangulares equilátero es raíz de 180 menos 6. Este cuerpo está contenido por el cubo cuyo lado es 12. Pero como EUCLIDES no dice que dicho cuerpo puede colocarse en el cuerpo cúbico, por eso veremos antes si en el cubo puede colocarse el cuerpo de veinte bases triangulares tal que toque con todos sus ángulos la superficie del cubo. Construiré el cuerpo de veinte bases triangulares *ghilklmnopqrs*, y fijaré el centro *a* del lado *gh*, es

decir la mitad del lado; y del lado *pk* el centro *b*; del lado *qr*, el centro *c*; del lado *no*, el centro *d*; del lado *si*, el centro *e*; del lado *lm*, el centro *f*. Ahora bien, el lado *gh* es opuesto al lado *pk* y ambos son equidistantes; el lado *qr* es opuesto al lado *is* y son equidistantes; el lado *no* es opuesto al lado *lm* y son equidistantes. Traza desde el punto *a* la línea *ab*; desde el punto *c* traza *ce*; desde el punto *d* traza la línea *df*. Todas estas líneas son iguales y se intersectan en el centro, todas en ángulo recto, y tocan sus lados también en ángulo recto. Has construido [así] el cuerpo de veinte bases triangulares, cuyos tres ejes pasan por el centro y son iguales entre sí. Construye ahora el cubo cuyos lados sean iguales al eje *ab*, que es igual a los otros, [es decir,] *ce* y *df*. Dicho cubo sea *1.* 2. *3. 4. 11.12. 13. 14*; luego toma el centro de todas sus caras, que son seis; sean tales centros *t, u, x*, *y*, *ç, r*; luego traza *tu, xç, ir*, que se intersectan entre sí en el centro del cubo, en ángulo recto, y que tocan las caras del cubo también en ángulo recto y son iguales entre sí, e iguales a los ejes *ab, ce, df*, porque son iguales al lado del cubo que se hizo igual al eje *ab*. Entonces, si colocas el cuerpo de veinte bases en dicho cubo, el lado *gh* del cuerpo de veinte bases tocará con sus dos ángulos *g* y *h* la cara del cubo *1. 2. 3. 4.*, y el lado del cuerpo de veinte bases *kp* tocará la cara del cubo *11. 12. 13. 14*. con sus ángulos *k* y *p*, y los dos ángulos del otro lado del cuerpo de veinte bases *q* y *r* tocarán la cara del cubo *1, 2. 11. 12.*; y los dos ángulos del otro lado del cuerpo de veinte bases *i* y *s* tocarán la cara del cubo *3. 4. 13. 14.*; y los dos ángulos del cuerpo de veinte bases *l* y *m* tocarán la cara del cubo *1. 11. 4. 14*; y los dos ángulos del cuerpo de veinte bases *n* y *o* tocarán la cara del cubo 2. *12. 3. 13*. Por otra parte, *a, b, c, d, e, f*, centros de los seis lados del cuerpo de veinte bases tocarán *t, u, x*, y, *ç, r*, centros de las caras del cubo. Ahora bien, tú tienes que los doce ángulos del cuerpo de veinte bases tocan las seis caras del cubo a razón de dos ángulos por cada cara, según se ha dicho; por lo tanto digo

que el cubo puede recibir en sí el cuerpo de veinte bases triangulares equilátero tal que toque con todos sus ángulos las caras del cubo. Ahora queda por ver si para el lado del cubo que contiene al cuerpo de veinte bases, dividido según la proporción que tiene el medio y dos extremos, la parte mayor es el lado del cuerpo de veinte bases contenido por dicho cubo. Tú tienes por el caso trigésimo primero de este tratado que el lado de la base del cuerpo de veinte bases si es igual a 4, da como potencia del diámetro de la esfera que lo contiene 40 más raíz de 320. Resta de ella la potencia del lado, que es 16, y queda 24 más raíz de 320, que es [la potencia de] lo que va de un lado al otro opuesto. Por lo tanto di: “si 24 más raíz de 320 como eje da como potencia del lado 16, ¿qué dará la potencia del eje que es 144?”. Multiplica 16 por 144 y da 2304; esto divídelo por 24 más raíz de 320. Halla el divisor de esta manera: multiplica 24 más raíz de 320 por 24 menos raíz de 320 y da 256; éste es el divisor. Multiplica 24 por 2304 y da 55.296; divide por 256 y resulta 216. Resérvalo. Eleva 16 al cuadrado y da 256; multiplica por 320 y da 81.920; eleva al cuadrado 144 y da 20.736; multiplica esto por 81.920 y da 1.698.693.120; eleva al cuadrado el divisor, que es 256, y da 65.536; divide por esto 1.698.693.120 y resulta raíz de 25.920 que restada de 256 da 256 menos raíz de 25.920. Tal es la potencia del lado del cuerpo de veinte bases contenido por el cubo cuyo lado es igual a 12, tal como dijimos arriba cuando se dividió el lado del cubo según la proporción que tiene el medio y dos extremos, de lo cual resulta la raíz de 180 menos 6; por lo tanto, multiplica esto por sí mismo y da 256 menos raíz de 25.920. Esto es lo que queríamos y se ve claro.

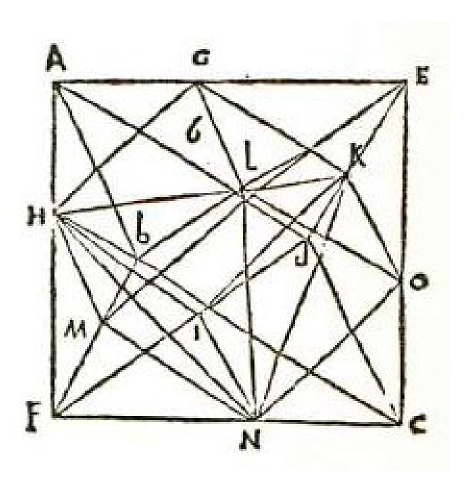
CASO 5. *Dado un cuerpo de ocho bases, cuyo lado es igual a 12, y un cubo inscrito en él, queremos hallar la cantidad del lado del cubo*. Tú tienes el cuerpo de ocho bases triangulares equilátero *abcdef* cada uno de cuyos lados es igual a 12, y que

tiene doce lados. Ahora bien, el cubo tiene ocho ángulos que tocan ocho lados del cuerpo de ocho bases; a saber, en el punto *g* del lado *ae*, en el punto *h* del lado *af*, en el punto *i* del lado *fd*, en el punto *k* del lado *de*, en el punto *l* del lado *be*, en el punto *m* del lado *bf*, en el punto *n* del lado *fc* y en el punto *o* del lado *ce*. Traza *gh, hi, ik, kg, in, gl, lm, mh, mn, no, ok, ol* y estará construido el cubo en el cuerpo de ocho bases.

Ahora bien, para conocer la cantidad del lado del cubo tú tienes *ae*, que es igual a 12, y que la potencia de *eg* es igual al doble de la de *ag*, porque *eg* es igual a *gh* y la potencia de *gh* es igual a la de *ag* más la de *ah*, líneas que contienen el ángulo recto. Por lo tanto, haz de 12 dos partes tales que, multiplicada cada una por sí misma, den una el doble de la otra. Di que una parte sea 1 *cosa*, que multiplicada por sí misma da 1 *censo*; la otra es 12 menos 1 *cosa*, y esto multiplicado por sí mismo da 144 menos 24 *cosas* más 1 *censo*. Esto duplícalo y da 288 menos 48 *cosas* más 2 *censos*; iguala las partes y tendrás que 1 *censo* más 288 es igual a 48 *cosas*; divide por mitad las cosas y tendrás 24; multiplícalas por sí mismas y da 576; resta el número, que es 288, y queda 288. Restando raíz de 288 a [l resultado de] la división por mitad de las *cosas*, es decir a 24, da la *cosa* correspondiente a *eg*. Entonces, *eg*, que es el lado del cubo, es 24 menos raíz de 288; y *ag* es raíz de 288 menos 12. De tal suerte has colocado el cubo en el cuerpo de ocho bases, cada uno de cuyos lados es igual a 12; y esto era lo que se deseaba saber.

CASO 6. *Dado el cuerpo de ocho bases triangulares equilátero en el cual cada lado es igual a 12, y que contiene un cuerpo de cuatro bases triangulares equiláteras, hallar el lado*. ℞ Por la precedente tienes que en el cubo circunscrito por el cuerpo de ocho bases cuyo lado es igual a 12, el lado de dicho cubo contenido por ese cuerpo es 24 menos raíz de 288; y por el segundo caso de este tratado tienes que la potencia del lado del cuerpo de cuatro bases es el doble de la potencia del lado del

cubo que lo contiene. Y donde entra el cubo entra también el cuerpo de cuatro bases. Duplica entonces la potencia del cubo, que es 24 menos raíz de 288, lo cual da 1728 menos raíz de 633.552. Di que tal es la potencia del lado del cuerpo de cuatro bases contenido por el cuerpo de ocho bases triangulares propuestos. Debes saber, con respecto a tales cuerpos regulares, que, aunque ellos pueden abarcarse e incluirse recíprocamente unos en otros, siempre con las debidas proporciones y proporcionalidades, de acuerdo con nuestra tantas veces señalada proporción que tiene el medio y dos extremos, como en su libro demuestra plenamente nuestro filósofo EUCLIDES, si bien no siempre nos son conocidas las proporciones de sus lados, es decir, que no pueden expresarse por medio de algún número quebrado o entero, eso no quita que otros infinitos cuerpos irregulares no puedan colocarse ajustadamente en dichos regulares de manera que al tocar un ángulo *tangerent omnes*, como todo sano intelecto puede darse cuenta; pero [tales cuerpos] no serán de lados ni de ángulos sólidos y superficiales iguales. Pero de ellos no se da cuenta en este tratado nuestro, pues tales cuerpos deben llamarse, entre los demás cuerpos, *helmuarisos*. Así lo dijo nuestro EUCLIDES al tratar de las superficies cuadriláteras, al principio de sus *Elementos*[121], después de haber definido las otras figuras cuadriláteras regulares, es decir, cuadrado, tetrágono alargados, *helmuaym* o rombo y el que se parece a él y que se llama romboide.



CASO 7. *Hallar el lado del cubo contenido por el cuerpo de doce bases pentagonales en que el lado de sus bases es igual a 4.*

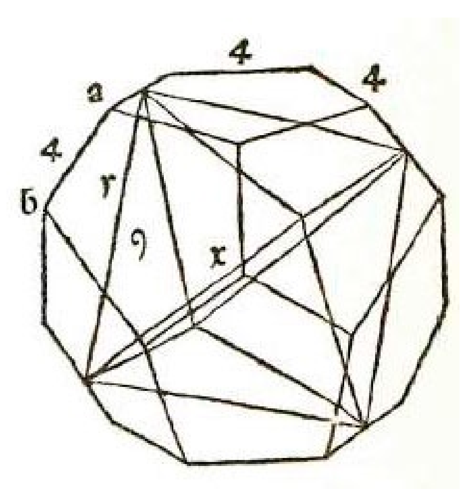
Haz así: halla la línea que se opone al ángulo pentagonal de una de las bases cuyo lado sabes que es igual a 4. Dicho lado es la parte mayor de esa línea dividida según la proporción que tiene el medio y dos extremos y que es lado del cubo construido en dicho cuerpo de doce bases. Por lo tanto, di que tal línea sea 4 más 1 *cosa*; luego multiplica 1 *cosa* más 4 por 1 *cosa*, y da 4 *cosas* más 1 *censo*; luego multiplica 4 por 4 y da 16; tienes así que el número 16, es igual a 4 *cosas* más 1 *censo*; divide las *cosas* y tendrás 2; multiplícalo por sí mismo y da 4, agrégalo al número que es 16 y da 20. Raíz de 20 menos 2, que es el resultado de la división de las *cosas*, es la *cosa*. Entonces, la parte menor es raíz de 20 menos 2 y la mayor es 4, que sumado a raíz de 20 menos 2 da raíz de 20 más 2. De esta manera el lado del cubo es raíz de 20 más 2, estando contenido dicho cubo por el cuerpo de doce bases pentagonales en que el lado de la base es igual a 4. Y esto era lo propuesto.

CASO 8. *Dado un cuerpo de doce bases pentagonales en que el lado de la base es igual a 4 y que contiene un cuerpo de cuatro bases triangulares, se quiere hallar el lado.* Tú tienes por la décima del décimoquinto libro de EUCLIDES que el lado del cubo duplicado es igual a la potencia del lado del cuerpo de cuatro bases inscrito en el mismo cuerpo de doce bases junto con el cubo; y por la precedente tienes que el lado del cubo construido en dicho cuerpo es raíz de 20 más 2. Multiplica entonces raíz de 20 más 2 por raíz de 20 más 2 y da 24 más raíz de 320. Esto duplícalo y da 48 más raíz de 1280. Tal es la potencia del lado del cuerpo de cuatro bases triangulares construido en el de doce bases pentagonales en que cada lado de la base es igual a 4. Por lo tanto, di que el lado del cuerpo de cuatro bases es raíz de la suma que da raíz de 1280 más 48.

CASO 9. *Dado el cuerpo de ocho bases triangulares equilátero contenido por el cuerpo de doce bases pentagonales en que cada lado de las bases es igual a 4, hallar el lado del cuerpo de ocho bases.*

Por la novena del decimoquinto de EUCLIDES tienes que la línea que pasa por los centros de las caras opuestas del cubo y que termina en los dos lados opuestos de las bases del cuerpo de doce bases donde [ese cuerpo] está inscrito es diámetro de la esfera donde se inscribe el cuerpo de ocho bases que dijimos. Y, como esta línea está compuesta por el lado de la base pentagonal más la línea que se opone al ángulo pentagonal de dicho cuerpo de doce bases, cuyo lado es igual a 4, y como por la trigésima del primero tienes que cuando el lado del pentágono es igual a 4 la línea que se opone al ángulo pentagonal es raíz de 20 más 2, lo cual sumado a 4 da 6 más raíz de 20, entonces la línea que pasa por los centros de las caras del cubo y que divide en partes iguales los lados del cuerpo de doce bases opuestos a las caras del cubo es igual a 6 más raíz de 20, que es diámetro de la esfera donde está inscrito dicho cuerpo de ocho bases. Y como tienes, por la octava [sobre dicho cuerpo] en el segundo tratado, que la potencia del diámetro de la esfera es el doble de la potencia del lado del cuerpo de ocho bases construido en ella, por lo tanto multiplica 6 más raíz de 20 por 6 más raíz de 20 y da 56 más raíz de 2880; esto divídelo en partes iguales y resulta 28 más raíz de 720. Tal es la potencia del lado del cuerpo de ocho bases triangulares contenido por el cuerpo de doce bases pentagonales en que el lado de la base es igual a 4. Di entonces que el lado del cuerpo de ocho bases es raíz de la suma que da raíz de 720 más 28. Y para que puedas ver más claramente que la línea formada por el lado del cuerpo de ocho bases más la línea que se opone al ángulo pentagonal es igual al diámetro de la esfera que contiene dicho cuerpo de ocho bases, tú tienes, por la vigesimosexta del segundo, que la potencia del diámetro de la esfera que circunscribe tal cuerpo de doce bases es 72 más raíz de 2880. Divide el diámetro en dos partes iguales y da 18 más raíz de 180, que corresponde a *ax*. Traza [una línea] desde *x* hasta la mitad de la base *ab* a la cual dividirá en el punto *y* en ángulo

recto; ahora bien, por la penúltima del primero de EUCLIDES tienes que la potencia de *ax* es igual a la suma de las potencias de las dos líneas *ay* y *xy*. Tú tienes que *ax* al cuadrado es igual a 18 más raíz de 180 y sabes que *ab* es igual a 4, que es el lado de la base pentagonal y que *ay es* la mitad, es decir 2. Multiplica dicha cantidad por sí misma y da 4, réstalo de 18 más raíz de 180 y queda 14 más raíz de 180. Tal es la potencia de *xy* que es la mitad; duplica y da 56 más raíz de 2880 que corresponde a todo el diámetro de la esfera que circunscribe el cuerpo de ocho bases triangulares, y se ve claro que es sumando el lado de la base pentagonal a la línea que se opone al ángulo pentagonal, y multiplicando [el resultado por sí mismo] da 56 más raíz de 2880. Tal como hicimos antes divídelo en partes iguales y da 28 más raíz de 720. Por lo tanto di que el lado del cuerpo de ocho bases triangulares contenido por dicho cuerpo de doce bases pentagonales es raíz de la suma que da raíz de 720 más 28.



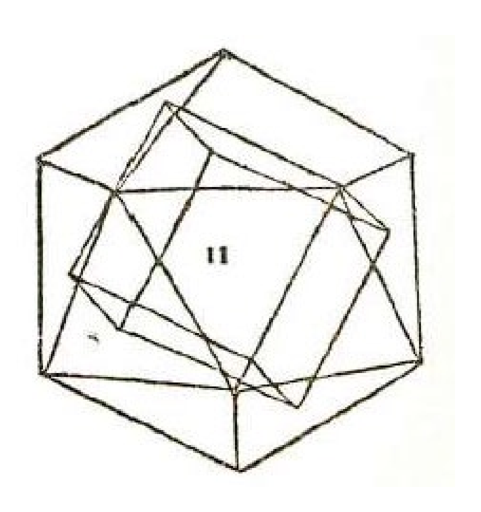
CASO 10. *Dado el cuerpo de doce bases pentagonales cuyo lado es igual a 4, se quiere hallar el lado del cuerpo de veinte bases triangulares contenido por él.* ℞ Para todos los cuerpos regulares hay cierta proporción entre lado de un cuerpo con respecto a su diámetro, es decir, así: entre el lado de un cuerpo de veinte bases, igual a 4, y su diámetro existe una proporción tal cual es la del lado de otro cuerpo de veinte bases, igual a 6, con respecto a su diámetro, vale decir eje, y así para todos los demás. Ahora bien, se ha dicho que en ese cuerpo de doce bases la potencia [de la línea] que va desde el centro de una de las

bases al centro de la otra opuesta es igual a 40 más raíz de 1548 y $\frac{4}{5}$, de acuerdo con lo que se dijo para hallar la cuadratura de dicho cuerpo de doce bases. También tienes por la trigésima del segundo que en el cuerpo de veinte bases, si el diámetro es 12, es decir, el diámetro de la esfera que lo contiene, da como lado la raíz de lo que queda de 72 restándole la raíz de 1036 $\frac{4}{5}$. Por lo tanto haz de esta manera: eleva al cuadrado 12 y da 144; luego di: "si 144 de diámetro me da como lado 72 menos raíz de 1036 $\frac{4}{5}$, ¿qué dará 40 más raíz de 1548 $\frac{4}{5}$?". Multiplica primero 40 por 72 y da 2880, esto divídelo por 144 y resulta 20; luego eleva al cuadrado 72 y da 5184; multiplica por 1548 $\frac{4}{5}$ y da raíz de 8.028.979 $\frac{1}{5}$; esto divídelo por 144 elevado al cuadrado, es decir, por 20.736 y resulta raíz de 387 $\frac{5184}{25920}$; tenlo en cuenta. Ahora eleva al cuadrado 40 y da 1600; esto multiplícalo por 2036 $\frac{4}{5}$ y da 1.658.880; y esto divídelo por 144 elevado al cuadrado, vale decir, por 20.736 y resulta raíz de 80; multiplica 1036 $\frac{4}{5}$ por 1548 $\frac{4}{5}$ y resulta 1.605.795 $\frac{21}{25}$; esto divídelo por 20.736 y resulta raíz de 77 $\frac{228096}{518400}$. Entonces dirás que el lado del cuerpo de veinte bases triangulares construido en el cuerpo de 12 bases cuyo lado es igual a 4 tiene como lado la raíz de la suma que da raíz 387 $\frac{5184}{25920}$ más 20 menos raíz de 80 y la raíz de 77 $\frac{228096}{518400}$.

CASO 11. *Dado el cubo circunscrito por el cuerpo de veinte bases triangulares equilátero cuyo lado es la raíz de lo que queda de* 72 *restándole raíz de 1036* $\frac{4}{5}$*, se quiere hallar el lado de dicho cubo.*

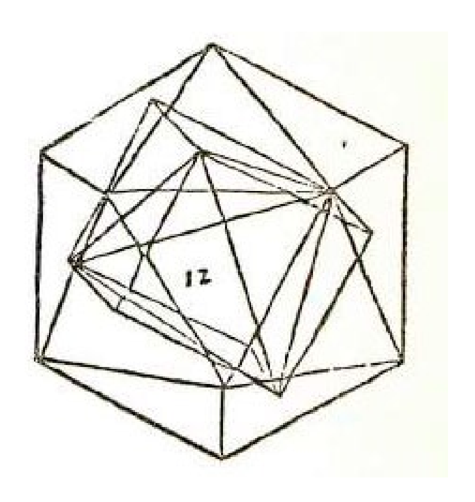
Tú tienes por la trigésima del segundo que cuando el lado del cuerpo de veinte bases triangulares es raíz de lo que queda de 72 restándole la raíz de 1036 $\frac{4}{5}$, el diámetro de su esfera es 12. Elévalo al cuadrado y da 144; luego halla el cateto de una base que es triangular y equilátera y cuyo lado tienes que es igual a raíz de lo que queda de 72 restándole la raíz de 1036 $\frac{4}{5}$. Por otra parte, tienes, por el caso primero del primer tratado, que la

potencia del cateto es sexquitercia con respecto a la potencia del lado; por lo tanto toma $\frac{3}{4}$ de 72 menos raíz de 1036 $\frac{4}{5}$, lo que da 54 menos raíz de 583 $\frac{1}{5}$, y tal es la proporción del lado con respecto al círculo que circunscribe la base, de manera que será igual a 96 menos raíz de 1843 $\frac{1}{5}$; esto réstalo de la potencia del diámetro de la esfera que contiene el cuerpo de veinte bases, la cual es igual a 144, y queda 48 más raíz de 1843 $\frac{1}{5}$. Tal es la potencia del diámetro de la esfera donde está inscrito el cubo; es decir, la potencia del diámetro es igual a 48 más raíz de 1843 $\frac{1}{5}$. Debes saber que la potencia del lado del cubo es $\frac{1}{3}$ de la potencia del diámetro de la esfera que lo contiene; por lo tanto toma un tercio de la potencia del diámetro que es 48 más raíz de 1843 $\frac{1}{5}$, lo que da 16 más raíz de 204 $\frac{4}{5}$; di entonces que el lado del cubo inscrito en el cuerpo de veinte bases cuyo lado es raíz de lo que queda de 72 restándole la raíz de 1036 $\frac{4}{5}$ será 16 más raíz de 204 $\frac{4}{5}$, es decir, raíz de la suma que da raíz de 204 $\frac{4}{5}$ más 16.



CASO 12. *Dado un cuerpo de veinte bases triangulares, siendo el lado de sus bases igual a raíz de lo que queda de 72 restándole 1036 $\frac{4}{5}$, se quiere hallar la cantidad del lado del cuerpo de cuatro bases triangulares inscrito en él.* Por la segunda de este tratado tienes que la potencia del lado del cuerpo de cuatro bases triangulares es doble con respecto a la potencia del lado del cubo inscrito en la misma esfera, y por la precedente tienes que la potencia del lado del cubo contenido por dicho cuerpo de veinte bases es igual a 16 más raíz de 204 $\frac{4}{5}$; por lo tanto, si el

lado del cubo es raíz de la suma que da raíz de 204 ⅘ más 16, queremos doblar dicha potencia que da 32 más raíz de 819 y ⅕. Entonces la raíz de la suma que da raíz de 819 ⅕ más 32 es el lado del cuerpo de cuatro bases que está inscrito en el cuerpo de veinte bases cuyo lado es raíz de lo que queda de 72 restándole la raíz de 1036 ⅘. Di entonces que el lado del cuerpo de cuatro bases triangulares inscrito en ese cuerpo es raíz de la suma que da raíz de 819 ⅕ más 32, conforme a lo que se demuestra por la primera del decimoquinto de EUCLIDES.



CASO 13. *Dado el cuerpo de veinte bases triangulares, siendo el lado de sus bases raíz de lo que queda de* 72 *restándole la raíz 1036 ⅘, construir en él un cuerpo de doce bases pentagonales y hallar su lado*. ℞ Tú tienes por la vigesimosexta del segundo que cuando el diámetro de una esfera es raíz de la suma que da la raíz de 2880 más 72, se tiene 4 como lado del cuerpo de doce bases. Se ha dicho también que la línea que sale del centro de una base del cuerpo de veinte bases y termina en el centro de la base opuesta a ella es raíz de la suma que da raíz de 1843 ⅕, más 48. Entonces, si 72 más raíz de 2880 de diámetro da 16 de lado, mejor dicho, de potencia del lado de la base del cuerpo de doce bases, di: "si 72 más raíz de 2880 de diámetro da 16 de lado, ¿qué dará 48 más raíz de 1843 ⅕?". Multiplica 16 por 48 y da 768; esto divídelo por 72 más raíz de 2880. Como es un binomio halla el divisor de esta manera: multiplica 72 más raíz de 2880 por 72 menos raíz de 2880 y da 2304; éste es el divisor.

Ahora multiplica 72 por 768 y da 55.296. Esto divídelo por

2304 y resulta 24. Tenlo presente. Luego multiplica 72 por sí mismo y da 5184, y esto multiplícalo por 1843 $\frac{1}{5}$ y da 9.555.148 y $\frac{4}{5}$; multiplica por 16 elevado al cuadrado, es decir, por 256 y da 2.446.118.892 $\frac{4}{5}$; divide por 5.308.416 y resulta 460 $\frac{2654083}{3317760}$; y tienes 24 más raíz de 460 $\frac{2654083}{3317760}$. Luego multiplica 48 por sí mismo y da 2304; esto multiplícalo por 2880 y da 6.635.520, y esto multiplícalo por 16 elevado al cuadrado, es decir, por 256, y da 1.698.693.120; divide por 5.308.416 y resulta 320. Tenlo presente. Luego multiplica 2880 por 1.843 $\frac{1}{5}$ y da 5.308.416; esto multiplícalo por 16 elevado al cuadrado, es decir por 256, y da 1.358.954.496; divide por 5.308.416 y resulta 256. Tienes así raíz de 320 y raíz de 256, que es 16. Esta última cifra debe restarse; entonces, tienes 24 más raíz de 460 $\frac{2654083}{3317760}$ menos 16 y raíz de 320. Di entonces que el lado del cuerpo de doce bases pentagonales inscrito en el cuerpo de veinte bases triangulares cuyo lado es raíz de la que queda de 72 menos raíz de 1036 $\frac{4}{5}$, es raíz de lo que queda de la suma que da raíz de 460 $\frac{2654083}{3317760}$ más 8 menos raíz de 320.

℞ La esfera es un cuerpo redondo. Según EUCLIDES[122] es el recorrido de un semicírculo que queda firme en el diámetro hasta que llega al lugar de donde se movió: *sphaera est tale corpus rotundum et solidum quod describitur ab arcu semicirculi circunducto*. Como se dice, la esfera es un cuerpo redondo y por medio de su eje se obtiene el mayor círculo; y por medio del eje y de la mayor circunferencia se obtiene la superficie y por medio de estos dos se obtiene la cuadratura.

CASO 14. *Dada la esfera cuyo diámetro, o sea eje, es igual a 7, hallar su círculo mayor*. ℞ Aquí se presupone que la circunferencia es 3 diámetros y $\frac{1}{7}$; por lo tanto multiplica 7 por 3 $\frac{1}{7}$ y da 22; entonces di que el círculo mayor que está en dicha esfera es igual a 22. Para todo este tratado de la esfera debes entender que 3 ejes y $\frac{1}{7}$ dan el círculo mayor de la esfera.

CASO 15. *Hallar la superficie de la esfera cuyo eje es igual a 7*. ℞ Haz de esta manera: multiplica el eje por la circunferencia del círculo mayor de la esfera que por la precedente tienes que es igual a 22, siendo el eje igual a 7. Multiplica 7 por 22 y da 154. Di entonces que 154 es su superficie. *Aliter*: tú tienes por la decimosegunda del primero de ARQUIMEDES que la superficie de la esfera es cuádruple con respecto a la superficie de su círculo mayor. El diámetro del círculo mayor es 7; multiplícalo por sí mismo y da 49; esto multiplícalo por 11 y luego divide por 14 y resulta 38 y $\frac{1}{2}$. Tal es la superficie del círculo mayor; multiplícala por 4 y da 154. Entonces, según dijimos antes, la superficie de tal esfera es 154.

CASO 16. *Se quiere hallar la cuadratura de una esfera dada cuyo eje es igual a 7*. ℞ Debes saber que la cuadratura de toda esfera es $\frac{11}{21}$ de la cuadratura de su cubo; entonces, el eje de la esfera

que es 7 es lado del cubo. Por lo tanto, eleva 7 al cubo y da 343; esto multiplícalo por 11 y da 3773; divide por 21 y resulta 179 $\frac{2}{3}$, tal es la cuadratura de dicha esfera. Ahora bien, por la primera del segundo del *De sphaera et chelindris* de ARQUIMEDES, tienes que la cuadratura de la esfera es sesquiáltera con respecto a la cuadratura de su cilindro. Tú tienes que la base del cilindro es 38 $\frac{1}{2}$; multiplica por 7 que es el eje de la esfera y la altura del cilindro y da 269 $\frac{1}{2}$; divide esto por 3 y resulta 89 $\frac{5}{6}$; réstalo de 269 $\frac{1}{2}$ y queda 179 $\frac{2}{3}$, como dijimos antes. Di entonces que la cuadratura de una esfera cuyo eje es igual a 7 es 179 $\frac{2}{3}$.

CASO 17. *Si de la superficie de una esfera cuyo eje es igual a 7 se hace la superficie de un cubo, hallar la cantidad del lado del cubo.*

ℜ Tú tienes por la decimoquinta de este tratado que en la esfera cuyo eje es 7, la superficie [del cubo] es 154; y como el cuerpo cúbico tiene 6 caras, divide 154 por 6 y resulta 25 $\frac{2}{3}$ La raíz de 25 $\frac{2}{3}$ es el lado que buscábamos del cubo, cuya superficie es 154.

CASO 18. *Si de la superficie del cubo cuyo lado es igual a 4 se hace la superficie de una esfera, se quiere hallar su eje*. ℜ Haz de esta manera: ve cuánto es la superficie del cubo cuyo lado tienes que es igual a 4. Multiplícalo por sí mismo y da 16; y como el cubo tiene seis caras multiplica 6 por 16 y da 96. Ahora bien, tú quieres hacer de ello una esfera cuya superficie sea 96. Por lo tanto multiplica 96 por 14 y da 1344; esto divídelo por 11 y resulta 122 $\frac{2}{11}$; de esto toma la mitad al cuadrado (por lo tanto eleva 2 al cuadrado y da 4), es decir, divide 122 $\frac{2}{11}$ por 4, y resulta 30 $\frac{6}{11}$. Di que la raíz de 30 $\frac{6}{11}$ es el diámetro o sea eje de la esfera cuya superficie es 96.

CASO 19. *Si de la cuadratura de la esfera cuyo eje es igual a 7 se hace la cuadratura de un cubo, ¿cuál será el lado del cubo?* ℜ Halla la cuadratura de la esfera cuyo eje sabes que es igual a 7.

Por la décimosexta de este tratado tienes que la cuadratura de dicha esfera es $179\ ^{2}/_{3}$; entonces el lado del cubo será raíz cúbica de $179\ ^{2}/_{3}$. Puede lograrse por otro camino, es decir, por medio de proporciones, pues entre el lado del cubo y el diámetro de la esfera de una misma cuadratura hay la misma proporción que entre la raíz cúbica de 343 y raíz cúbica de $179\ ^{2}/_{3}$. En efecto, si tú elevas al cubo 7, que es el eje de la esfera, da 343; y tú sabes que el cubo, mejor dicho, su cuadratura, es a la cuadratura de la esfera como 21 a 11. Multiplica, pues, 343 por 11 y da 3773; divide por 21 y resulta $179\ ^{2}/_{3}$. Así, raíz cúbica de $179\ ^{2}/_{3}$ es el lado del cubo, que buscamos, según dijimos antes.

CASO 20. *Si de un cubo cuya cuadratura es 64 se hace una esfera, hallar la cantidad de su diámetro*. Tú debes saber que toda cuadratura de esfera es $^{11}/_{21}$ de la cuadratura de su cubo; y tú tienes por la primera del segundo del *De sphaera et chelindro* de ARQUIMEDES que la cuadratura de la esfera con respecto a la cuadratura de su cilindro es sesquitercia. Tienes así que el cilindro es $^{11}/_{14}$ de su cubo y que la cuadratura de la esfera es $^{11}/_{21}$ de su cubo y que el cubo propuesto es 64. Multiplica por 21 y da 1344; divide por 11 y resulta $122\ ^{2}/_{11}$. Di entonces que la raíz cúbica de $122\ ^{2}/_{11}$ es el diámetro o eje de la esfera buscada. Y esto era lo propuesto.

CASO 21. *Si de la cuadratura de la esfera cuyo eje es 7 se hace una pirámide, vale decir, cono, cuyos lados sean iguales al diámetro del círculo de la base, hállese la cantidad de su eje*. Por la decimosexta de este tratado tienes que la cuadratura de dicha esfera es $179\ ^{2}/_{3}$; de ella se quiere hacer una pirámide. Por lo tanto halla primero una pirámide cuyo eje sea conocido; di que sea igual a 4; y como forma un triángulo equilátero será sesquitercia la potencia del eje con respecto a su lado, según tienes por el primer caso del primero. La potencia del eje es 16. Entonces, la potencia del lado es $21\ ^{1}/_{3}$; multiplícala por 11 y da

$234 \frac{2}{3}$; divide por 14 y resulta $16 \frac{16}{21}$. Tal es la superficie de la base que multiplicada por el eje que es 4 da $67 \frac{1}{21}$. Y como esto es un cilindro y tú deseas tener la pirámide, sabiendo que toda pirámide es un tercio de su cilindro, divide entonces $67 \frac{1}{21}$ por 3 y resulta $22 \frac{22}{63}$. Tal es la cuadratura de la pirámide. Ahora bien, tú quieres que sea $179 \frac{2}{3}$; por lo tanto eleva 4 al cubo y da 64. Ahora di: "si $22 \frac{22}{63}$ de cuadratura da como potencia del eje 64, ¿qué dará $179 \frac{2}{3}$?". Multiplica 64 por $179 \frac{2}{3}$ y da $11498 \frac{2}{3}$; esto divídelo por $22 \frac{22}{63}$ y resulta $514 \frac{1}{2}$. La raíz cúbica de $514 \frac{1}{2}$ es eje de la pirámide.

CASO 22. *Si de la cuadratura de la pirámide, cuyo eje es 4, se hace una esfera, queremos ver cuál es su eje*. ℞ Tú tienes por la precedente que en la pirámide cuyo eje es igual a 4 su cuadratura es igual a $22 \frac{22}{63}$. De ella deseas hacer una esfera; y como tienes que la esfera cuya cuadratura es $179 \frac{2}{3}$ da 343 de [cubo de] eje, entonces di: "si $179 \frac{2}{3}$ da 343, ¿qué dará $22 \frac{22}{63}$?". Multiplica $22 \frac{22}{63}$ por 343 y da $7665 \frac{49}{63}$; esto divídelo por $179 \frac{2}{3}$ y resulta $42 \frac{7546}{11319}$. Di entonces que la raíz cúbica de $42 \frac{7546}{11319}$ es el diámetro de la esfera obtenida de la cuadratura de la pirámide cuyo eje es igual a 4.

[DIVISIÓN DE LA ESFERA POR LA LÍNEA PLANA]

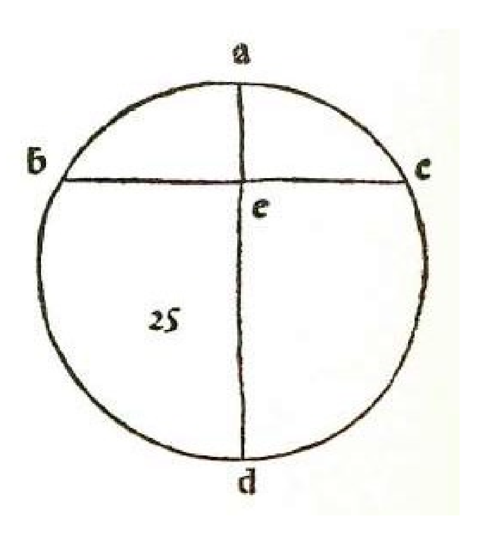
CASO 23. *Dada la esfera cuyo diámetro es igual a 14 y una línea plana que separa 4 del eje, hallar la cantidad que separa de la superficie*. En la decimoquinta de este tratado se ha dicho que la superficie de la esfera es cuatro veces la superficie del círculo mayor de dicha esfera. Se dijo además que multiplicando el eje de la esfera por la circunferencia del círculo mayor se obtenía la superficie de toda la esfera. Entonces multiplicando 14, que es el diámetro, por 44, que es la circunferencia, da 616. Tal es la superficie de toda la esfera. Tú tienes la esfera *abcd* cuyo eje es *ad* y la linea divisoria es *bc*. Ahora, para hallar la cantidad de *bc* que corta *ad* en el punto *e*, como se ha dicho que *ae* es igual a 4, multiplica entonces 4 por el resto del diámetro, que es 10, y da 40. Raíz de 40 es *be*. Esto se demuestra en la trigésimocuarta[123] del tercero de EUCLIDES. Entonces, si *be* es raíz de 40 que es la mitad de *bc*, todo *bc* será raíz de 160. Tienes por otra parte que el diámetro *ad* es 14 y que la línea divisoria *be es* raíz de 160 y corta el diámetro en el punto *e*. Ahora bien, tú tienes que *be* es raíz de 40 que es la mitad de *bc* y que *ae* es igual a 4; multiplica esto por sí mismo y da 16; agrégalo al 40 y da 56. Entonces *ab* es raíz de 56, pues su potencia es igual a la suma de las potencias de las líneas *ae y be*, por la penúltima del primero de EUCLIDES. Ahora bien, duplica esta raíz de 56 y tendrás 224, mejor dicho, raíz de 224; esto multiplícalo por 11 y da 2464; divídelo por 14 y resulta 176. Esto es lo que se separa de la superficie de la esfera cuyo diámetro es 14, cuando de él se corta 4 con una línea plana que separa de la superficie 176, como se afirma por la cuadragésimo primera del primero de ARQUIMEDES.

CASO 24. *Una línea plana que es igual a 9 divide una esfera cuyo*

eje es 14; se quiere hallar en qué lugar [*dicha línea*] *corta el eje*. ℞ Tú tienes la esfera *abcd* cuyo eje es *ad* y la línea *be* que corta en ángulo recto el eje en el punto *e*. Ahora bien, al ser cortada, la línea *dc* es dividida en partes iguales en el punto *e*. Entonces *be* es igual a 4 ½ que es la mitad de *bc*, que es 9; multiplica 4 ½ por sí mismo y da 20 ½. Ahora di así: "hazme del diámetro o eje de la esfera, que es 14, dos partes tales que multiplicando una por la otra dé 20 ¼; por lo tanto, di que una parte es 1 *cosa*, la otra será 14 menos 1 *cosa*; multiplica 1 *cosa* por 14 menos 1 *cosa* y da 14 *cosas* menos 1 *censo*". Ahora tú deseas tener 20 ¼; restaura las partes y tendrás que 1 *censo* más 20 ¼ es igual a 14 *cosas*. Divide por 2 las *cosas* y tendrás siete; multiplícalo por sí mismo y da 49; resta el número que es 20 ¼ y queda 28 ¾. Restando raíz de 28 ¾ a[1 resultado de] la división de las *cosas*, que es 7, da la *cosa*. Entonces una parte es 7 menos raíz de 28 y la otra parte es 7 más raíz de 28 ¾; luego, se corta del eje 7 menos raíz de 28 ¾.

CASO 25. *Si una línea plana, igual a raíz 96, corta la esfera cuyo eje es igual a 14, hallar qué parte de la superficie de la esfera separa*. ℞ La esfera es *abcd* y su eje *ad* es 14, y la línea divisoria, que es *bc*, es raíz de 96. Toma la mitad, es decir, raíz de 24 que corresponde a *be*; multiplícala por sí misma y da 24. Ahora haz del eje, que es 14, dos partes tales que multiplicando una por la otra dé 24. Supón que una parte sea 1 *cosa* y la otra 14 menos 1 *cosa*; multiplica 1 *cosa* por 14 menos 1 *cosa* y da 14 *cosas* menos 1 *censo*. Tú deseas tener 24. Restaura las partes y tendrás que 1 *censo* más 24 es igual a 14 *cosas*. Divide por mitad las *cosas* y tendrás 7; multiplícalo por sí mismo y da 49; resta el número que es 24 y queda 25. Restando raíz de 25 a [l resultado de] la división de las *cosas*, que es 7, da la *cosa*. La raíz de 25 es 5, réstalo de 7 y da 2; corta 2 del eje, que multiplicado por el resto que es 12 da 24. Por la trigésimocuarta[124] del tercero de

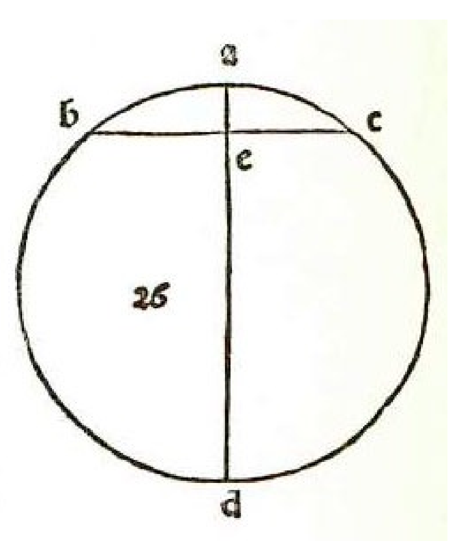
EUCLIDES en que, [dadas] dos líneas que se intersecan en el círculo, el resultado que se obtiene multiplicando una parte [de una línea] por la otra es igual al que se obtiene multiplicando una parte de la otra línea por la otra parte, tienes que una parte de la línea divisoria que es raíz de 24 es la mitad; entonces la otra mitad es raíz de 24; y multiplicando raíz de 24 por raíz de 24 da 24, igual que una parte del eje que es 2 por el resto que es 12. Por otro lado, por la penúltima del primero de EUCLIDES, la potencia de *ab* es igual a la suma de las potencias de las dos líneas *ae* y *be; ae* es igual a 2; multiplícalo por sí mismo y da 4; agrégalo a *be* que es raíz de 24 y da 28. La raíz de 28 es *ab*; multiplícalo por 2 al cuadrado y da 112; y esto multiplícalo por 11 y da 1232; divide por 14 y resulta 88. Di entonces que la línea *be*, que es igual a raíz de 96, separa 88 de la superficie de la esfera. Y esto es lo que nos proponíamos.



CASO 26. *Si de una esfera cuyo eje es igual a 14 una línea plana separa de la superficie 100, se quiere saber cuánto cortará del eje*.

℞ Tu esfera es *abcd*, cuyo eje *ad* es 14, y la línea divisoria es *bc*. Traza entonces *ab* y di que es 1 *cosa*; esto duplícalo y da 2 *cosas*; multiplica por sí mismo y da 4 *censos*; multiplica por 11 y da 44 *censos*. Tú quieres 100 de superficie. Multiplica 100 por 14 y da 1400: esto divídelo por los *censos* que son 44 y resulta 31 $^{9}/_{11}$. La raíz de 31 $^{9}/_{11}$ es la *cosa* que es a*b*. Ahora, multiplica por sí mismo *ad*, que es el eje, igual a 14, y da 196. Por la penúltima del primero de EUCLIDES tienes que la potencia de *ad* es igual a la suma de las potencias de las líneas *ab* y *bd*. Entonces resta la potencia de *ab* que es 31 $^{9}/_{11}$, de la potencia de *ad* que es

196 y queda 164 $^{2}/_{11}$. La raíz de 164 $^{2}/_{11}$ es *bd*. Ahora como has hecho un triángulo que es *abd*, para encontrar en qué lugar corta *ad* la línea divisoria, halla el cateto de esta manera: suma la potencia de *ab*, que es 31 $^{9}/_{11}$, a la potencia de *ad*, que es 196, y da 227 $^{9}/_{11}$; luego, resta 164 $^{2}/_{11}$ y queda 63 $^{7}/_{11}$; esto divídelo por el doble de *ad* que será 28, y resulta 2 $^{3}/_{11}$. Esto es lo que [la línea] corta del eje *ad* que es 14, al separar 100 de la superficie de la esfera. Puede hacerse también de otra manera. Tú quieres separar de la superficie de la esfera 100; halla el diámetro de un círculo cuya superficie es 100, así: multiplica 100 por 14 y da 1400; divide por 11 y resulta 127 $^{3}/_{11}$; esto divídelo por 2 al cuadrado, es decir por 4, y resulta 31 $^{9}/_{11}$. Tal será *ab*, es decir, raíz de 31 $^{9}/_{11}$, cuya potencia es igual a la suma de las potencias de *be* y *ae*; *ae* es igual a 2 $^{3}/_{11}$; multiplícalo por sí mismo y da 5 $^{20}/_{121}$; réstalo de 31 $^{9}/_{11}$ y queda 26 $^{79}/_{121}$. La raíz de 26 $^{79}/_{121}$ es *be*. Como en la cuadragésimo primera del primero de ARQUIMEDES se dice que el semidiámetro del círculo es la línea ab y que la superficie de tal círculo es igual a la superficie de la parte *bac* de la esfera *abcd*, tienes que separando 100 de la superficie se corta 2 $^{3}/_{11}$ del eje.

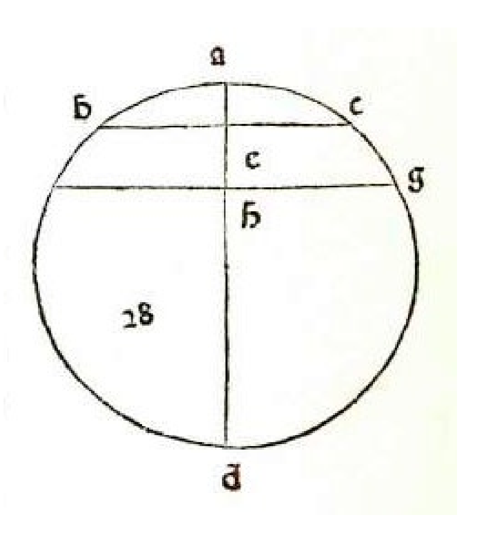


CASO 27. *Dada una esfera cuyo eje es 14 y una línea plana que corta 5 del eje, se quiere hallar lo que separará de la cuadratura de la esfera.* ℜ Haz de esta manera: ve primero cuánto es la línea divisoria *bc*, que sabes que corta el eje *ad* en el punto *e*; sabes también que *ae* es 5 y que el resto del eje *de* es 9. Entre *ae* y *be* hay la misma proporción que hay entre *be* y *de*; multiplica

entonces, por la trigcsimocuarta[125] del tercero de EUCLIDES, *ae*, que es 5, por *de*, que es 9, y da 45. La raíz de 45 es *be*. En cantidades que están en proporción, la menor por la mayor da tanto cuanto la media por sí misma; *ae, be* y *de* están en proporción porque *ae* por *de* da tanto cuanto *be* por sí misma. Por otra parte, la potencia de *ab*, por la penúltima del primero de EUCLIDES, es igual a la suma de las potencias de las dos líneas *ae* y *be*. Se ha dicho que la potencia de *be* es 45 y que *ae* es 5; esto multiplicado por sí mismo da 25, que sumado a 45 da 70. La raíz de 70 es *ab*, la cual es semidiámetro de la superficie del círculo que es igual a la superficie de la parte *abc*. Por lo tanto, multiplica por 2 *ba*, que es raíz de 70, y da raíz de 280; esto multiplícalo por 11 y da 3080; divide por 14 y resulta 220. Esto es lo que [esa línea] separa de la superficie de la esfera. Tú quieres lo que separa de la cuadratura de la esfera; multiplica por lo tanto 220 por $\frac{1}{6}$ del eje, que es 14, es decir por $\frac{1}{3}$ y da 513 $\frac{1}{3}$. De esto queremos restar el cono *bcf*; es decir de esta manera: tú tienes *be* que es raíz de 45, multiplícalo por 2 al cuadrado y da 180; esto multiplícalo por 11 y da 1980; divide por 14 y resulta 141 $\frac{1}{3}$ esto multiplícalo por *ek*, que es igual a 2, y da 282 $\frac{6}{7}$; divide por 3 y resulta 94 $\frac{2}{7}$; resta esto de 513 $\frac{1}{3}$ *Y* queda 419 $\frac{1}{21}$. Esto es lo que separa de la cuadratura de la esfera la línea *be* al cortar 5 del eje *ad*, siendo el eje igual a 14; es decir, que separa 419 $\frac{1}{21}$ de cuadratura.

CASO 28. *Si de una esfera cuyo eje es igual a 14, dos líneas planas y equidistantes cortan del eje una 3 y la otra 6, se quiere hallar la cantidad de la superficie entre las dos líneas.* ℛ Tú tienes la esfera *abcdfg*; halla primero la línea *fg* que corta 6 del eje y corta *ad* en el punto *h; ah* es igual a 6 y *hd* a 8. Tienes por la precedente que entre *ah* y *hf* hay la misma proporción que entre *hf* y *hd*; y para cantidades que están en proporción la menor por la mayor da tanto cuanto la media por sí misma. Entonces multiplica *ah*, que es 6, por *hd*, que es 8, y da 48. Entonces *fh* es

raíz de 48. Por la penúltima del primero de EUCLIDES tienes que la potencia de *af* es igual a la suma de las potencias de *ah* y *fh*. Se ha dicho que la potencia de *fh* es 48 y que *ah* es 6, que multiplicado por sí mismo da 36. Esto agregado a 48 da 84. Tal es la potencia de *af*. Por la precedente tienes que se debe multiplicar por 2 al cuadrado esta cantidad, lo que da 336; esto multiplícalo por 11, pues queremos reducirlo a una superficie circular, y da 3696; esto divídelo por 14 y resulta 264. Resérvalo. Ahora bien, para la línea *bc* que corta *ad* en el punto *e*, siendo *ae* igual a 3 y a 11, multiplica, como antes, 3 por 11 y da 33. La potencia de *ab* es igual a la suma de las potencias de *ae* y *be*. La potencia de *be* es 33 y la de *ae*, que es igual a 3, es 9; suma a 33 y da 42. La raíz de 42 es *ab*; multiplica esto por 2 al cuadrado y da 168; esto luego multiplícalo por 11 y da 1848; divide por 14 y resulta 132; resta esto de 264, que reservaste, y queda 132. Esta cantidad, 132, es lo que se separa de la superficie de la esfera, entre las dos líneas *bc* y *fg*, al cortar una 3 del eje y la otra 6.



CASO 29. *Dada la esfera cuyo eje* ad *es 14 y dos líneas planas y equidistantes de las cuales una corta 3 del eje y la otra corta 6, hallar cuánto se separará de la cuadratura de la esfera entre una y otra línea.* Por la precedente se ha visto que la línea *af* es raíz de 84, la cual duplicada da raíz de 336; esto multiplicado por 11 da 3696; divide por 14 y resulta 274. Esto es la superficie de la parte *afg*, que multiplicada por la mitad de *ad*, que es 7, da 1848; divide por 3 y resulta 616. Ahora queremos obtener el cono *fgk*. Tú tienes que *fh* es raíz de 48; multiplícalo

por 2 al cuadrado y da 192; multiplica por 11 y da 2112; divide por 14 y resulta 150 $^6/_7$; multiplica esto por *h* que es 1, y da 150 $^6/_7$; divide por 3 y da 50 $^2/_7$ resta esto de 616 y queda 565 $^5/_7$. Tal es la cuadratura de la parte *afg*; de ella resta la cuadratura de la parte *bac* cuya superficie, por la precedente, tienes que es igual a 132; multiplícala por la mitad del eje, que es 7, y da 924; divide por 3 y resulta 308; de esto se quiere obtener la cuadratura del cono *bc* de esta manera: tú tienes por la precedente que *be* es raíz de 33 que es la mitad de *bc*; por lo tanto, multiplícalo por 2 al cuadrado y da 132; esto multiplícalo por 11 y da 1452; divide por 14 y resulta 103 $^5/_7$; multiplica por *ek*, que es 4, y da 414 $^5/_7$; esto divídelo por 3 y resulta 138 $^3/_7$; resta esto de 308 y queda 169 $^5/_7$; réstalo de 565 $^5/_7$ y queda 396. Esta cantidad, 396, será la cuadratura entre las dos líneas *bc* y *fg*. Tienes entonces que la cuadratura entre las dos líneas *bc* y *fg* es 396, que es lo que buscábamos.

[II]

Habiendo hablado de los cuerpos regulares abarcados por la esfera, y de sus lados, superficies y cuadraturas y de su colocación, uno dentro de otro, me parece oportuno hablar además de algunos cuerpos irregulares contenidos por la esfera, tocando con todos los ángulos su superficie cóncava, y por algunos otros cuerpos de superficies triangulares. Mostraremos sus medidas.

CASO 1. *Dado un cuerpo de 72 bases, 24 triangulares y 48 cuadranglares, de ángulos y lados no iguales, cuyo lado mayor, es decir dos lados de cada base, es igual a 2, se pregunta por el diámetro de la esfera que lo circunscribe y por la superficie.* La construcción de este cuerpo la demuestra CAMPANO en la decimocuarta del decimosegundo de EUCLIDES[126], pero no da la cantidad de sus lados sino con líneas, ni da su superficie, que es lo que se pide. Entonces, para conocer con respecto al cuerpo propuesto su superficie y el eje de la esfera que lo encierra haremos un círculo *abc*, y sea *g* su centro, y su diámetro *ad* sea igual a 8. Divide la circunferencia en 12 partes iguales, *a*, *e*, *f*, *b*, *h, i, d*, *k*, *c, m, n*; digo que cada una será la raíz de lo que queda de 32 restándole raíz de 768. Tal es el lado en el círculo cuyo diámetro es igual a 8; y tú deseas que sea 2. Por lo tanto di: “si la raíz de lo que queda de 32 restándole raíz de 768 da como potencia del diámetro 64, [¿qué dará 2 de lado?]”[127]. Eleva 2 al cuadrado y da 4; multiplica por 64 y da 256.

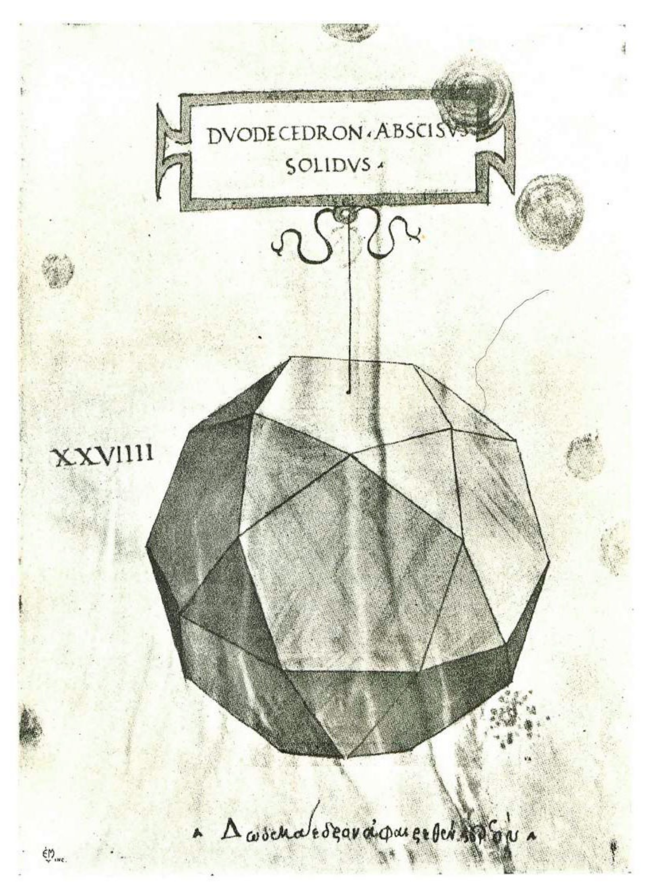
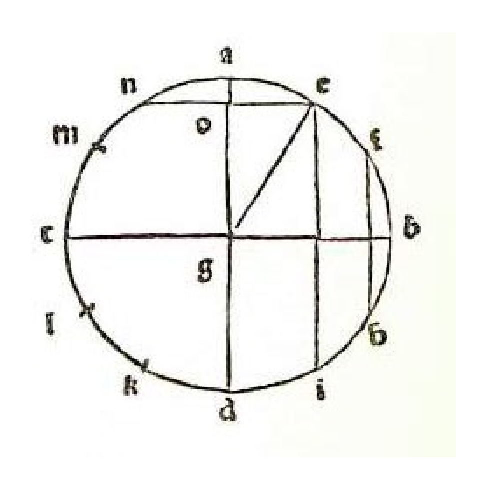


Ilustración del manuscrito de la *La Divina Proporción*. Biblioteca de Ginebra.

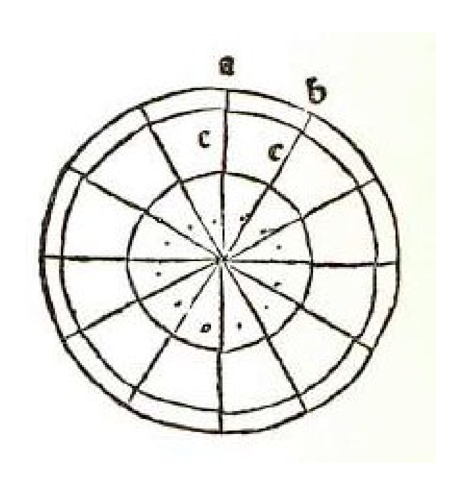
Halla el divisor; es decir, de 32 menos raíz de 768, que es binomio, resulta el divisor 256. Ahora multiplica 32 por 256 y da 8192, divide por 256 y da 32; luego eleva al cuadrado 256 y da 65.536. Esto, multiplicado por 768 y lo que da dividido por 256 elevado al cuadrado, da como resultado 768. Entonces el eje de la esfera que circuscribe el cuerpo de 72 bases cuyo lado mayor es igual a 22, es raíz de la suma que da raíz de 768 más 32. Ahora queremos hallar la superficie; tú tienes el círculo *aefbhidklcmn* y el diámetro *ad* que es igual a 8; traza *ei* y *fh* que es la mitad del diámetro; como es lado del hexágono, será 4; por otra parte, la potencia del diámetro *ad* es igual a 64 que es el

cuádruplo de la potencia de *fh*, que es 16. En cuanto a la línea *ei*, traza *en* que divide *ag* en el punto *o*, siendo *oe* igual a 2, porque *cn* es igual a *ag*, que es 4. También *ge* es igual a 4, que multiplicado por sí mismo da 16; resta la potencia de *co*, que es 4, y queda *og*, igual a raíz de 12, que es la mitad de la línea *ei*, la cual es igual a raíz de 48.



Tienes así las 3 líneas *ad, ei* y *fh*. La potencia de *ad* es 64; la potencia de *ei* es 48 y la potencia de *fh* es 16; potencias que están [en proporción] como 1, 3 y 4. Ahora bien, entre *ad y ei* hay la misma proporción que entre *ab* y *cd* de la segunda figura[128]; de la misma manera, entre *ei y fh* como entre *cd y ef* de la segunda figura. Hemos dicho que el lado *ab* es 2 y que su potencia es 4; la potencia de *cd* será 3 y la de *ef* 1, por la razón antedicha. Tenemos también que *ac* es 2; *ce*, 2; y *eg*, 2. Nosotros queremos el cateto de cada una. La potencian del cateto de la superficie *abcd*, que es *pq*, es 2 ¼ más raíz de 3, y la potencia del cateto de la superficie *cdef*, que es *qr*, es 3 más raíz de ¾ y el cateto del triángulo *efg*, que es *gr*, es raíz de 3 ¾. Tú debes saber que multiplicando el cateto de un triángulo por su base da la superficie de dos triángulos. Tú tienes que dicha base es igual a 1, que multiplicado por raíz de 3 ¾ da raíz de 3 ¾, que es la superficie de 2 triángulos. Tú quieres 24 triángulos; toma la mitad, que es 12; elévala al cuadrado y da 144, multiplica por 3 ¾ y da 540. La raíz de 540 es la superficie de 24 triángulos. Ahora bien, para los 24 espacios tabulares [iguales a] *cdef, ef* es igual a 1 y *cd* es igual a raíz de 3; eleva al cuadrado 1 más raíz de 3 y da 4 más raíz de 12; toma de esto ½ al cuadrado y dará 1 más raíz de ¾, multiplícalo, por su cateto que es 3 más raíz de

$\frac{3}{4}$, y lo que da multiplícalo por 12 elevado al cuadrado, y da 2.160 más raíz de 2.239.488 y raíz de 248.832, tal es la potencia de los 24 espacios tabulares [iguales a] *cdef*; es decir, 2160 más raíz de 2.239.488 y raíz de 248.832. Ahora, para la superficie de 24 espacios tabulares [iguales a] *abcd*, tienes que *ab* es igual a 2 y *cd* a raíz de 3; sumados dan 2 más raíz de 3, y su potencia es 7 más raíz de 48. Toma la mitad al cuadrado [, es decir, $\frac{1}{4}$] y tendrás 1 $\frac{3}{4}$ más raíz de 3; multiplicando esto por el cateto que es 2 $\frac{1}{4}$ más raíz de 3 y multiplicando lo que da por 12 al cuadrado, da 3996 más raíz de 5.038.848 y raíz de 3.048.192. Tal es la potencia de la superficie de los 24 espacios tabulares [iguales a] *abcd*. Tienes así la superficie del cuerpo de 72 bases divididas en tres, debido a la diferencia de los catetos y de las bases. Ahora bien, para la cuadratura descríbase la tercera figura *gbtu* en la cual se trazarán tres triángulos *gro, rqo, qpo*. En ellos *og* es semidiámetro y su potencia es 8 más raíz de 48. Según dijimos antes, tienes que *gr* es raíz de 3 $\frac{3}{4}$ y *or* es desconocido; pero tú tienes que *fo* es 8 más raíz de 48, que es igual a *og*, y tienes que *ef* es igual a 1; entonces *rf* será que multiplicado por sí mismo da $\frac{1}{4}$; réstalo de 8 más raíz de 48 y queda *or*, igual a 7 $\frac{3}{4}$ más raíz de 48. Entonces el triángulo *ogr*, tiene el lado *og* igual a 8 más raíz de 48 y *gr* a raíz de 3 $\frac{3}{4}$ y *or* a 7 $\frac{3}{4}$ más raíz de 48. Ahora bien, nosotros queremos el cateto que cae sobre la base *gr*, y hallarás que es igual a 6 $\frac{14}{15}$ más raíz de 48; mejor dicho, ésta es su potencia, que debe multiplicarse por $\frac{1}{3}$ de la superficie de 24 triángulos, que dijimos ser igual a 540, del que $\frac{1}{3}$ es igual a 60, que



multiplicado por 6 $^{14}/_{15}$ más raíz de 48, da 360 $^{56}/_{60}$ más raíz de 162.800. Tal es la cuadratura de las 24 pirámides triangulares, es decir, raíz de la suma que da la raíz de 162.800 más 360 $^{14}/_{15}$. Tal es la cuadratura de las 24 pirámides triangulares [iguales a] *efgo*. Ahora queremos hallar el cateto del triángulo *oqr*, en que encontrarás que *rq* es raíz de la suma que da raíz de $^{3}/_{4}$ más 3. La potencia de *qo* es 7 $^{1}/_{4}$ más raíz de 48; la potencia de *ro* es 7 $^{3}/_{4}$ más raíz de 48, y el cateto será raíz de la suma que da raíz de 48 menos raíz de $^{102}/_{4356}$, más 6 $^{8}/_{11}$. Multiplica esto por $^{1}/_{3}$ de la superficie de 24 espacios tabulares [iguales a] *cdef*, cuya tercera parte es 240 más raíz de 49.152; tal multiplicación dará 1.614 $^{6}/_{11}$ más raíz de 2.224.432 $^{80}/_{121}$ y raíz de 2.764.800 y raíz de 2.359.296, menos raíz de 2.538 $^{102}/_{121}$ y raíz de 2166 $^{174}/_{363}$. Es decir, que la cuadratura de las 24 pirámides [iguales a] *cdefo*, es raíz de la suma que da raíz de 2.224.432 $^{80}/_{121}$ y raíz de 2.764.800 y raíz de 2.359.296 más 1.614 $^{6}/_{11}$ restándole raíz de 2538 $^{102}/_{121}$ y raíz de 2.166 $^{174}/_{363}$. La raíz de lo que queda es la cuadratura de las 24 pirámides [iguales a] *cdefo*. Ahora bien para las 24 pirámides [iguales a] *abcdo*, halla primero el cateto del triángulo *opq*; sabes que *pq* es 2 $^{1}/_{4}$ más raíz de 3, que la potencia de *op* es 7 más raíz de 48, y que la de *oq* es 7 $^{1}/_{4}$ más raíz de 48; hallarás que el cateto es igual a la raíz de la suma que se obtiene de raíz de 48 y raíz de 2 $^{58}/_{363}$ más, 6 $^{6}/_{11}$ menos raíz de 3 $^{69}/_{121}$. Resta, ahora, la raíz de 3 $^{69}/_{121}$ de la raíz de 48 y queda raíz de 26 $^{224}/_{1089}$; multiplica por ésta la tercera parte de la superficie de los 24 [espacios] tabulares [iguales a] *abcd*, cuya tercera parte será 444 más raíz de 37.632 más raíz de 62.208, que multiplicado por el cateto dará raíz de la suma que dan estas ocho raíces, es decir, raíz de 2.665.175 $^{97}/_{121}$, raíz de 1.612.266 $^{102}/_{121}$, raíz de 9.462.528, raíz de 2.985.984, raíz de 1.806.336, raíz de 425.770 $^{114}/_{363}$, raíz de 134.355 $^{69}/_{121}$, raíz de 81.27 6 $^{300}/_{363}$, restándole raíz de 703.824 $^{48}/_{121}$ y raíz de 222.097 $^{118}/_{121}$ y raíz de

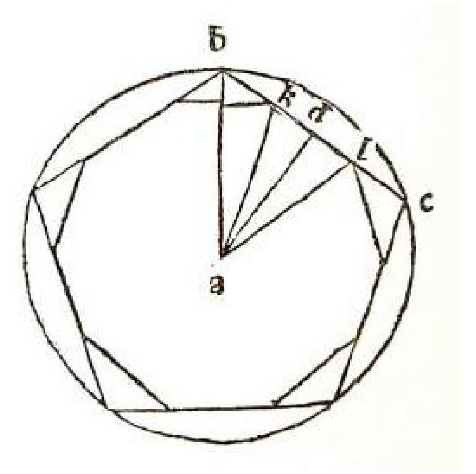
134.355 $^{69}/_{121}$, y sumando el resto a 2906 $^{2}/_{11}$. La raíz de dicha suma será la cuadratura de las 24 pirámides [iguales a] *abcdo*. De este modo tienes la cuadratura en tres partes. En forma semejante se da en tres partes la superficie de las bases, causa de la diversidad de sus catetos, y las cuadraturas de las pirámides por ser distintos sus ejes. Se obtienen así números y raíces que multiplicados unos por otros originan muchas raíces.

CASO 2. *Dado un cuerpo de 32 bases, es decir, 20 hexagonales y 12 pentagonales, siendo ios lados de cada una igual a 2 y tocando sus ángulos la superficie cóncava de la esfera que circunscribe a dicho cuerpo, se pregunta por el diámetro de la esfera y por la superficie del cuerpo de 32 bases y por su cuadratura.* Este cuerpo se forma del cuerpo de veinte bases triangulares, el cual tiene veinte bases triangulares y doce ángulos sólidos, compuestos por cinco ángulos. Por lo tanto, si se corta uno, se obtiene un pentágono; cortando los doce, se obtienen doce pentágonos. Para que las veinte bases, que son triangulares, queden equiláteras al transformárselas en hexágonos, hay que dividir cada lado en tres partes iguales. Si se quiere que cada lado sea igual a 2, como dice el enunciado, hallaremos un cuerpo de veinte bases cuyo lado sea igual a 6. Tú tienes por la trigésimo primera del segundo que, cuando el lado del cuerpo de veinte bases es igual a 4, el diámetro de la esfera que lo contiene es raíz de la suma que da 40 más raíz de 320. ¿Qué te dará el lado que es igual a 6? Elevándolo al cuadrado te dará 90 más raíz de 1620. Esto divídelo por 2 al cuadrado y tendrás 22 $^{1}/_{2}$ más raíz de 101 $^{1}/_{4}$; resta de esto 12 que es el semidiámetro del círculo que contiene la base triangular del cuerpo de veinte bases y queda 10 $^{1}/_{2}$ más raíz de 101 $^{1}/_{4}$ desde el centro de la esfera al centro de la base. Divide el lado de la base [por 3] y cada parte será igual a 2. Se hará un hexágono equilátero del cual cada lado será igual a 2; multiplica el lado por sí mismo y da 4; súmalo a 10 $^{1}/_{4}$ más raíz de 101 y dará 14 $^{1}/_{4}$ más raíz de 101 $^{1}/_{4}$. Tal será la

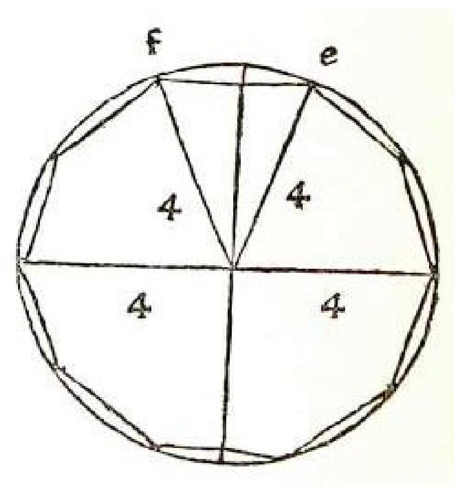
potencia del semidiámetro [de la esfera] que circunscribe al cuerpo de 32 bases propuesto. El lado del pentágono es también igual a 2; queremos hallar el diámetro del círculo que lo contiene. Por la vigésimo séptima del primero, cuando el lado del pentágono es igual a 4 el diámetro del círculo que lo circunscribe es raíz de la suma que da raíz de 204 $\frac{4}{5}$ más 32; de esto toma $\frac{1}{4}$ al cuadrado, [es decir $\frac{1}{16}$] y tendrás 2 más raíz de $\frac{4}{5}$; esto réstalo de 14 $\frac{1}{2}$ más raíz de 101 $\frac{1}{4}$ y queda 12 $\frac{1}{2}$ más raíz de 78 $\frac{51}{64}$. Tal es la potencia del eje de la pirámide pentagonal, y la superficie de una base pentagonal es raíz de la suma que da raíz de 500 más 25; la superficie de todas las doce es raíz de la suma que da raíz de 10.368.000 más 3600. Ahora bien, para la superficie de las 20 bases hexagonales tienes que el lado de cada una es igual a 2, y para cada base tienes 6 triángulos equiláteros cuyo cateto es raíz de 3, que multiplicado por la mitad de la base, que es igual a 1, da raíz de 3, que es la superficie de un triángulo. Ahora bien, cada base tiene 6 triángulos, y las bases son 20; multiplica por 6 y da 120; esto elévalo al cuadrado y da 14.400; multiplica por 3 y da 43.200. La raíz de 43.200 es la superficie de las 20 bases hexagonales. De esta manera tú tienes que la superficie de las bases hexagonales es igual a raíz de 43.200, y la superficie de las 12 bases pentagonales es raíz de la suma que da la raíz de 10.368.000 más 3600. Todo esto es la superficie del cuerpo de 32 bases. Queremos ahora la cuadratura. Toma, por lo tanto, $\frac{1}{3}$ de la superficie de las 20 bases hexagonales, que será igual a 4800, y multiplícalo por el eje que es 10 $\frac{1}{2}$ más raíz de 101 $\frac{1}{4}$; da 50.400 más raíz de 261.700.000. La raíz de la suma que da raíz de 261.700.000 más 50.400 es la cuadratura de las 20 pirámides hexagonales. Ahora, para las 12 pirámides pentagonales, debes tomar $\frac{1}{3}$ de su superficie, que tienes que es igual a 3600 más raíz de 10.368.000 $\frac{1}{4}$; dicho tercio será 400 más raíz de 128.000;

multiplícalo por su eje, que es igual a 12 $\frac{1}{2}$ más raíz de 78 $\frac{51}{64}$, y da 5000 más raíz de 20.000.000 más raíz de 10.086.000. La raíz de la suma que da raíz de 20.000.000 más raíz de 10.086.000 más 5000 es la cuadratura de las 12 pirámides pentagonales que sumadas [a las pirámides hexagonales] dan la cuadratura del cuerpo de 32 bases, 20 hexagonales y 12 pentagonales, siendo el lado de cada una igual a 2 y el diámetro de la esfera que lo circunscribe a raíz de la suma que da 1.620 más 58.

CASO 3. *Dado el cuerpo de 32 bases, 20 triangulares equiláteras y 12 decagonales equiláteras, inscrito en la esfera y que toca con todos sus ángulos la circunferencia cóncava de la esfera, hallar el diámetro de la esfera, los lados, la superficie y la cuadratura.* Dado que este cuerpo deriva del cuerpo regular que tiene 12 bases pentagonales, cortando sus 20 ángulos que forman 20 superficies triangulares quedan 12 bases decagonales de lados iguales. Por lo tanto tendremos en cuenta la vigésimo nona del segundo que dice que en el cuerpo de 12 bases pentagonales en que el lado de la base es igual a 4, el eje que une el centro de una base al centro de la otra opuesta a ella es raíz de la suma que da raíz de 1548 $\frac{4}{5}$ más 40. Y por la vigesimoséptima del primero tienes que en el círculo que circunscribe al pentágono, cuyo lado es igual a 4, el diámetro es raíz de la suma que da raíz de 204 $\frac{4}{5}$ más 32; toma de esto $\frac{1}{2}$ al cuadrado y da 8 más raíz de 12 $\frac{4}{5}$; de esto resta la potencia de la mitad de un lado de la base que es 4, mitad que será igual a 2; multiplica esto por sí mismo y da 4; réstalo de 8 más raíz de 12 $\frac{4}{5}$ y queda 4 más raíz de 12 $\frac{4}{5}$, que corresponderá



a *ad* del triángulo *abc*, uno de los cinco triángulos de la base pentagonal. Ahora queremos dividir *bc* tal que la parte media sea lado del decágono equilátero trazado en la base pentagonal. Haré entonces un círculo cuyo diámetro será 8; su mitad es 4, que es lado del hexágono, y, conforme a la novena del decimotercero de EUCLIDES en que, dividiendo el lado del hexágono según la proporción que tiene el medio y dos extremos, la parte mayor es lado del decágono inscrito en el mismo círculo, divide 4, de acuerdo a esa proporción, es decir, la proporción que tiene el medio y dos extremos, y tendrás que la parte mayor es raíz de 20 menos 2. Entonces 4 da raíz de 20 menos 2, que es *fg* del triángulo *fgh*; pero tú buscas el cateto *hi*. Divide raíz de 20 menos 2 en partes iguales y tendrás raíz de 5 menos 1; multiplícala por sí misma y da 6 menos raíz de 20; esto réstalo de la potencia de *hf*, que es igual a 4 y cuya potencia es igual a 16; resta, entonces, 6 menos raíz de 20 y queda *hi* igual a 10 más raíz de 20; entonces 10 más raíz de 20 te da raíz de 20 menos 2, cuya potencia es 24 menos raíz de 320. Pero tú deseas saber qué te da 4 más raíz de 12 $\frac{4}{5}$; multiplica 4 más raíz de 12 $\frac{4}{5}$ por 24 menos raíz de 320 y divide por *hi*, que es igual a 10 más raíz de 20, y resulta 12 más raíz de 115 $\frac{1}{5}$ más raíz de 16 más raíz de 12 $\frac{4}{5}$ menos raíz de 28 $\frac{4}{5}$ y raíz de 23 $\frac{1}{25}$ y raíz de 80 y raíz de 64. Juntando los negativos y los positivos, mejor dicho, restando los negativos de los positivos queda 3 $\frac{1}{5}$, que es la potencia de[l lado de] dicho decágono, que es *kl* cuya mitad es *kd*, es decir, raíz de $\frac{4}{5}$, que sumado a *ad*, que es 4 más raíz de 12 $\frac{4}{5}$, dará 4 $\frac{4}{5}$ más raíz de 12



$\frac{4}{5}$. Esto súmalo al eje que va de un centro de una base al centro de la esfera y que es igual a 10 más raíz de 96 $\frac{4}{5}$, y da 14 $\frac{4}{5}$ más raíz de 180; multiplica esto por 2 al cuadrado y da 59 $\frac{1}{5}$ más raíz de 2880. Tal es la potencia del eje de la esfera que circunscribe dicho cuerpo de 32 bases y el lado de la base es raíz de 3 $\frac{1}{5}$. De dicho cuerpo, veinte bases son triangulares y equiláteras y cada uno de sus lados es raíz de 3 $\frac{1}{5}$ y su cateto es raíz de 2 $\frac{2}{5}$. La superficie de cada base será raíz de 1 $\frac{23}{25}$, y la superficie de todas las veinte será raíz de 768. Ahora, para la superficie de las doce bases decagonales de las cuales cada una es igual a diez triángulos, siendo la base de cada uno de ellos igual a raíz de 3 $\frac{1}{5}$, y siendo su cateto igual a raíz de la suma que da raíz de 12 $\frac{4}{5}$ más 4, y siendo [en total] 120, toma la mitad que será 60; eleva al cuadrado y tendrás 3600; y esto por 3 $\frac{1}{5}$, que es la base, da 11.520; multiplica por 4 y da 46.080; luego eleva al cuadrado 11.520 y lo que da multiplícalo por 12 $\frac{4}{5}$, lo cual da raíz de 1.698.693.120. Tienes así que la superficie de las 12 bases decagonales es raíz de la suma que da raíz de 1.698.693.120 más 46.080; y la superficie de los 20 triángulos es raíz de 768. Sumando da la superficie de todo el cuerpo de 32 bases. Nosotros hemos determinado, de dicho cuerpo, los lados de la base, el diámetro de la esfera que lo circunscribe y la superficie y el eje de las pirámides decagonales, que es raíz de la suma que da raíz de 180 más 10. Queremos ahora el eje de las 20 pirámides triangulares, que encontrarás que son iguales a raíz de la suma que da raíz de 180 más 13 $\frac{11}{15}$. Multiplica entonces 13 $\frac{11}{15}$ más raíz de 180 por la tercera parte de 768 y da 3515 $\frac{11}{15}$ más raíz de 11.796.480. Tal es la cuadratura de las 20 pirámides triangulares, es decir, raíz de la suma que da raíz de 11.796.480 más 3515 $\frac{11}{15}$. Para las doce bases decagonales multiplica 10 más raíz de 180 por $\frac{1}{3}$ de 46.080 más raíz de 1.698.693.120, lo que da 153.600 más raíz de 18.874.368.000 más raíz de

42.467.328.000 más raíz de 305.764.761.600. Tal es la cuadratura de las 12 pirámides decagonales, es decir la raíz de la suma que da 117.964.800.000 más raíz de 305.764.761.600 más 153.600. De esta manera tienes que la cuadratura del cuerpo de 32 bases, doce decagonales y veinte triangulares, es igual a la raíz de 42.467.328.000 más raíz de 18.874.368.000. Sumadas dan raíz de 117.964.800.000.

CASO 4. *Dado el cuerpo de catorce bases, es decir seis cuadradas y ocho hexagonales, siendo el lado de cada base igual a 2, se pregunta cuál será su superficie y su cuadratura, y el diámetro de la esfera.*

℞ Este cuerpo se forma del cuerpo de ocho bases triangulares cortando sus seis ángulos sólidos y dividiendo cada lado en tres partes iguales. Ahora bien, puesto que se exige que cada lado sea igual a 2, es necesario que el lado del cuerpo de ocho bases sea igual a 6. Entonces, si el cuerpo de ocho bases triangulares da 6 como lado, el cateto correspondiente será raíz de 72, que multiplicado por 36 elevado al cuadrado da raíz de 93.312. Divide por 9 y resulta raíz de 10.368. La raíz de 10.368 es la cuadratura del cuerpo de ocho bases triangulares, del cual, cortando sus seis ángulos, se obtendrán seis pirámides cuadradas cada uno de cuyos lados será igual a 2, siendo cada superficie de sus bases igual a 4 y el eje de cada una de ellas igual a 2. Toma entonces ⅓ de la superficie de todas las seis bases, que es igual a 8, y multiplícalo por sí mismo; da 64. Esto multiplícalo por 2 y da 128; resta esta raíz de la raíz de 10.368; queda raíz de 8192, que es la cuadratura del cuerpo de catorce bases propuesto. Ahora para la superficie tú tienes que seis bases son cuadradas y que el lado de cada una es igual a 2, que al cuadrado da 4; entonces, 4 por 6 da 24. Tal es la superficie de las seis bases cuadradas. Por otra parte, las ocho bases hexagonales se dividen cada una en triángulos equiláteros, cada uno de cuyos lados es igual a 2, y el cateto es raíz de 3. Toma la mitad de las 8 bases que corresponden a 48 triángulos; la mitad es 24 bases y cada

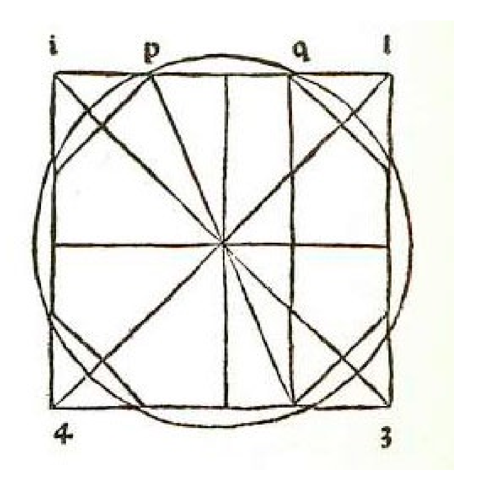
una es 2, lo que da 48; multiplica esto por sí mismo y da 2304; esto multiplícalo por el cateto que es 3 y da 6912. La raíz de 6912 corresponde a las ocho bases hexagonales, que, sumadas a las seis bases cuadradas que son 24 dan la superficie de todo el cuerpo, igual a 24 más raíz de 6912. Queremos ahora el diámetro de la esfera que circunscribe a dicho cuerpo. Tú tienes que desde el centro de tal cuerpo a la mitad del lado del cuerpo de ocho bases da 3, que elevado al cuadrado es 9; sumando esto a la potencia de la mitad del lado del hexágono, que es igual a 1, da 10. La raíz de 10 es el semidiámetro de dicho cuerpo. Todo el semidiámetro es raíz de 40 y la superficie es 24.

[Nota]. Lector, no te extrañe si, para tales cuerpos compuestos de diversas y varias bases, no se ponen al margen sus figuras, puesto que son muy difíciles de dibujar, ya que se necesita que estén hechas por la mano de un buen perspectivo, y no siempre se puede tener uno para este propósito, tal como por su amor a las humanidades hizo nuestro LIONARDO DA Vinci, estando en Milán al propio sueldo del excelentísimo señor duque de esa ciudad, LUDOVICO MARIA SFORZA. Pero cuando aquí, en el tratado anterior y también en el siguiente, haya algunos casos que se han puesto, o que vamos a poner, [sin la figura correspondiente,] basta que tú ojees entre los dibujos puestos antes, al principio, en perspectiva [y hechos por LIONARDO] de su propia mano, pues de dichos cuerpos, según en lugar oportuno se dijo antes, en el capítulo 55, las formas se perpetúan al infinito. Y, si observas bien, entre aquéllos no se dibujó el cuerpo del decágono; pero aquí lo hemos puesto en el tercer tratado, como caso tercero. Tú podrás hacer lo mismo con los demás.

CASO 5. *Dado el cuerpo de 14 bases, es decir, seis octagonales y ocho triangulares equiláteras, contenido por la esfera cuyo eje es igual a 10, se quiere hallar el lado, la superficie y la cuadratura.* ℛ Fórmase tal cuerpo del cubo, cortando sus ocho ángulos de

manera que los lados del cubo queden octágonos equiláteros. Dicha división la haremos con la proporción. Y, como en todo círculo que contiene la superficie octagonal la proporción entre el [cuadrado del] diámetro del círculo y el [cuadrado del] lado del octágono inscrito en él es la misma que la de la potencia de 2 con respecto a 2 menos raíz de 2, sea el círculo *abcdefgh* que contiene el octágono que corresponde a dichas letras y sea *ae* igual a 2 y la potencia del lado *ab* sea 2 menos raíz de 2; restando esto de la potencia de *ae*, que es igual a 4, queda [la potencia de] *be* igual a 2 más raíz de 2 que es el [cuadrado del] lado del cubo *kmno*. Y sumando [las potencias de] *be* y *ae* da 6 más raíz de 2, que es la potencia del eje de la esfera que contiene al cuerpo de catorce bases, siendo el [cuadrado del] lado de cada una de ellas igual a 2 menos raíz de 2. Pero nosotros queremos que el eje de la esfera que se pide sea igual a 10. Por lo tanto di: "si 6 más raíz de 2 da 2 menos raíz de 2, ¿qué dará la potencia de 10 que es 100?". Dará 411 $^{13}/_{17}$ menos raíz de 1107 $^{308}/_{1156}$. Tal es [la potencia de] cada lado del cuerpo de catorce bases, siendo el eje de la esfera que lo circunscribe igual a 10. Ahora para la superficie hay que hallar el lado del cubo del cual se forma dicho cuerpo, y hay que tomar su mitad. Vuelve a la figura que hicimos y de la cual dijimos que su eje, que [elevado al cuadrado] es 6 más raíz de 2, da como lado del cubo *be*, que [elevado al cuadrado] es igual a 2 más raíz de 2. Si 6 más raíz de 2 da 2 más raíz de 2, ¿qué dará 10 elevado al cuadrado? Te dará 29 $^{7}/_{17}$ más raíz de 276 $^{236}/_{289}$. Tal es el [cuadrado del] lado del cubo *1*. 2. *3*. *4*. de la segunda figura, lado que es *qt*, que [elevado al cuadrado y] sumado a *pq* [al cuadrado], que es igual a 41 $^{3}/_{17}$ menos raíz de 1107 $^{77}/_{289}$, dará la potencia de *pt*, es decir, raíz de lo que queda de 70 $^{77}/_{289}$ restándole raíz de 276 $^{236}/_{289}$. Entonces el cuadrado de *pt* es 70 $^{10}/_{17}$ menos raíz de 276 $^{236}/_{289}$, que corresponde al diámetro del círculo que circunscribe la base octangular; dicho cuadrado multiplicado por su mitad da [la

potencia de] la superficie de la base octangular. Por lo tanto, toma la mitad de 70 $^{10}/_{17}$ menos raíz de 276 $^{239}/_{289}$, que es 35 $^{5}/_{17}$ menos raíz de 69 $^{59}/_{289}$; esto multiplicado por 70 $^{10}/_{17}$ menos raíz de 276 $^{236}/_{289}$ y da 2491 $^{101}/_{289}$ más raíz de 19.156 $^{51494}/_{83521}$ menos raíz de 5.517.175 $^{26858}/_{83521}$. Tal es la potencia de la superficie de una base octagonal; pero nosotros queremos seis; por lo tanto, eleva 6 al cuadrado y da 36; luego multiplica esto por 2491 $^{101}/_{289}$ más la raíz de 19.156 $^{51494}/_{83521}$ menos la raíz de 5.517.175 $^{26852}/_{83521}$ y da 89688 $^{168}/_{289}$ más la raíz de 24.826.975 $^{3125}/_{83521}$ menos la raíz de 7.150.259.216 $^{40564}/_{83251}$. Tal es la potencia de la superficie de las seis bases de ocho lados. Ahora queremos hallar la superficie de las ocho bases triangulares equiláteras. Cada uno de sus lados [elevado al cuadrado] es raíz de lo que queda de 41 $^{3}/_{17}$ restándole la raíz de 1107 $^{77}/_{289}$, y el [cuadrado del] cateto es raíz de lo que queda de 30 $^{15}/_{17}$ restándole raíz de 622 $^{242}/_{289}$, lo cual multiplicado por la [potencia de la] mitad de la base, que es 10 $^{5}/_{17}$, menos raíz de 69 $^{59}/_{289}$, da 525 $^{150}/_{289}$ menos raíz de 264.005 $^{38395}/_{83521}$. Ésta es la potencia de la superficie de un triángulo; pero nosotros queremos 8. Eleva 8 al cuadrado y multiplica por 525 $^{150}/_{289}$ menos raíz de 264.005 $^{38395}/_{83521}$ y da 33.633 $^{62}/_{289}$ menos raíz de 1.081.366.362 $^{79398}/_{83521}$. Tal es la potencia de la superficie de ocho triángulos. De esta manera tienes que para la superficie de todo el cuerpo de catorce bases la de las seis octagonales es igual a raíz de lo que queda de 89.688 $^{168}/_{289}$ más raíz de 24.826.975 $^{3125}/_{83521}$ menos raíz de 7.150.259.216 $^{40564}/_{83521}$. La superficie de las ocho bases



triangulares es igual a raíz de lo que queda de 33.633 $^{63}/_{289}$ menos raíz de 1.081.366.362 $^{79398}/_{83521}$. Ahora bien, para la cuadratura toma la mitad de *qt*, lado del cubo que es igual a la raíz de la suma que da raíz de 276 $^{236}/_{289}$ más 29 $^{7}/_{17}$, siendo la [potencia de la] mitad igual a 7 $^{6}/_{17}$ más raíz de 17 $^{87}/_{289}$. Esto multiplícalo por [la potencia de] $^{1}/_{3}$ de la superficie de las seis bases de ocho lados, siendo [dicha potencia de] $^{1}/_{3}$ igual a 9965 $^{115}/_{289}$ más raíz de 306.505 $^{5849898}/_{6764201}$ menos raíz de 88.274.805 $^{959295}/_{6764201}$, y da 73.274 $^{4838}/_{4913}$ más raíz de 16.571.467 $^{1179009937}/_{1954854089}$ más raíz de 1.718.151.484 $^{2497604}/_{24137569}$ más raíz de 5.302.869 $^{1367418659}/_{1954854089}$ menos raíz de 4.772.643.011 $^{1095315526}/_{1954854089}$ y raíz de 1.527.245.763 $^{1367025093}/_{1954854089}$. Tal es la [potencia de la] cuadratura de las pirámides octangulares de dicho cuerpo. Ahora bien, para la cuadratura de las ocho pirámides triangulares, cuya superficie tienes que es igual a raíz de lo que queda de 33.633 $^{63}/_{289}$ restándole raíz de 1.081.566.362 $^{79398}/_{83521}$. Halla el eje que sale del centro de la esfera y termina en uno de los ocho triángulos y encontrarás que [su potencia] es igual a 11 $^{42}/_{153}$ más raíz de 123 $^{77}/_{2061}$; esto multiplícalo por [la potencia de] $^{1}/_{3}$ de la superficie de los ocho triángulos, que es igual a 3737 $^{7}/_{289}$ menos raíz de 13.350.202 $^{8822}/_{751689}$ y da 42.133 $^{571}/_{4913}$ más raíz de 1.718.151.484 $^{2497604}/_{24137569}$ menos la de 1.642.470.066 $^{1570726126}/_{164854089}$ y raíz de 1.697.005.205 $^{1447221755}/_{1954854089}$ Tal es la [potencia de la] cuadratura de las 8 pirámides triangulares del cuerpo propuesto. De esta manera tienes que para el cuerpo de catorce bases, seis de ocho lados y ocho triangulares, el eje de la esfera que lo circunscribe es igual a 10; su cuadratura es raíz de lo que queda de 73.274 $^{4838}/_{4913}$ más raíz de 16.571.467 $^{1179009937}/_{1954854089}$ más raíz de 1.718.151.484 $^{2497606}/_{24137569}$ más la raíz de 5.302.869 $^{1367418659}/_{1954854089}$ restando a esto la raíz de 4.772.643.011 $^{1095315326}/_{1954854089}$ y la de 1.527.245.763 $^{1367025093}/_{1954854089}$, más raíz

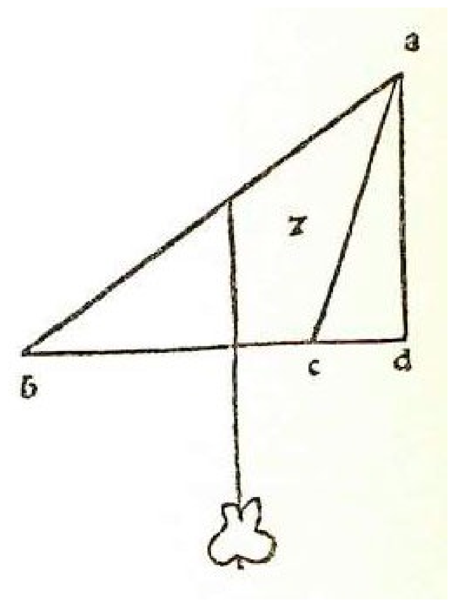
de lo que queda de 42.133 $^{571}/_{4913}$ más raíz de 1.718.151.484 $^{2497604}/_{24137569}$ restándole la raíz de 1.642.470.066 $^{1570726126}/_{1954854089}$ y la raíz de 1.697.005.205 $^{1447221755}/_{195485089}$. Tal es la cuadratura del cuerpo propuesto.

CASO 6. *Dada una esfera cuyo eje es igual a 12, en la cual está encerrado un cuerpo irregular de ocho bases, cuatro triangulares y cuatro de seis lados, en el cual los ángulos tocan la superficie cóncava de la esfera, se quiere conocer los lados, la superficie y la cuadratura*. ℞ Haz así: toma el cuerpo de cuatro bases equilátero *abcd* y sea su eje *ae* igual a 12. Cada uno de sus lados será igual a raíz de 216. Haz de cada uno de ellos tres partes iguales y cada una será raíz de 24. Sea *f* el centro; por la primera sobre el cuerpo de cuatro bases, *f* estará en los $^{3}/_{4}$; entonces, *ef* será igual a 3, que multiplicado [por sí mismo] da 9, que sumado al lado, que es igual a 24, da 33; éste es el semidiámetro *fh* de la esfera. Ahora bien, nosotros queremos que sea 36; entonces, si 33 da 24 de lado ¿qué dará 36? Multiplica 24 por 36 y da 864; divide por 33 y resulta 26 $^{2}/_{11}$. La raíz de 26 $^{2}/_{11}$ es el lado del cuerpo de ocho bases que se ha pedido. Ahora bien, para la superficie tú tienes que dicho cuerpo tiene ocho bases, cuatro hexagonales y cuatro triangulares equiláteras, las que se dividen en 28 triángulos. Toma la mitad, es decir 14, multiplícala por sí misma y da 196; esto multiplícalo por el cateto de una base, que es igual a 19 $^{7}/_{11}$ y, da 3848 $^{8}/_{11}$. La raíz de 3848 $^{8}/_{11}$ es la superficie de dicho cuerpo. Ahora cuádralo: sabes que se forma del cuerpo de cuatro bases triangulares cortando sus cuatro ángulos; divide por tres [el lado de] una base, que es raíz de 235 $^{7}/_{11}$ y da 26 $^{2}/_{11}$; toma dicho tercio, que es 26 $^{2}/_{11}$ y [de él] toma $^{1}/_{2}$ al cuadrado y será 6 $^{6}/_{11}$, réstalo de 26 $^{2}/_{11}$ y queda 19 $^{7}/_{11}$ que es el cateto; resta $^{1}/_{3}$ de 26 $^{2}/_{11}$ y queda 17 $^{5}/_{11}$ que es eje de un triángulo; multiplica 6 $^{6}/_{11}$ por 19 $^{7}/_{11}$ y da 128 $^{64}/_{121}$; esto divídelo por 3 al cuadrado y resulta 14 $^{34}/_{121}$;

multiplícalo por $17\ ^{5}/_{11}$ y da $249\ ^{357}/_{1331}$. La raíz de $249\ ^{357}/_{1331}$ es la cuadratura de una de las cuatro puntas. Pero tú quieres cuatro; elévalo al cuadrado y da 16 y 16 por $249\ ^{357}/_{1331}$ da raíz de $3988\ ^{388}/_{1331}$.

Tal es la cuadratura de las cuatro puntas. Tenlo presente. Vuelve a la pirámide mayor cuyo lado es raíz de $235\ ^{7}/_{11}$ siendo el cateto raíz de $176\ ^{8}/_{11}$; esto multiplícalo por la mitad de la base que es $58\ ^{10}/_{11}$ y da raíz de $10.410\ ^{102}/_{121}$; multiplica por la tercera parte del eje que es raíz de $17\ ^{5}/_{111}$ y da $181.716\ ^{708}/_{1331}$. Tal es la pirámide triangular equilátera donde se forma el cuerpo propuesto, es decir raíz de $181.716\ ^{708}/_{1331}$, y la cuadratura del cuerpo de ocho bases, cuatro hexagonales y cuatro triangulares es raíz de $181.716\ ^{708}/_{1331}$ menos raíz de $3988\ ^{388}/_{1331}$; siendo igual a 12 el diámetro de la esfera que la circunscribe. Y esto es lo que se pedía.

CASO 7. *Dado el triángulo en que uno de los lados es igual a 2, el otro a 3 y el tercero a 4, y una línea que sale desde un punto a una distancia de 2 del lado igual a 3 y que divide perpendicularmente y en dos partes iguales el triángulo, se pregunta la cantidad de la línea.*



Sea el triángulo *abc* y *ab* sea igual a 4, *bc* a 3 y *ac* a 2. Ve ahora cuánto es su superficie; hallarás que es igual a raíz de $8\ ^{7}/_{16}$; halla el cateto que cae desde el ángulo *a* y cae afuera del triángulo, separado $^{1}/_{2}$ del punto *c*; este medio multiplícalo por sí mismo y da $^{1}/_{4}$; resta esto de la potencia de *ac* que es igual a 4 y queda $3\ ^{3}/_{4}$. La raíz de $3\ ^{3}/_{4}$

es el cateto *ad*; multiplícalo por *bd* elevado al cuadrado y da 45 $^{15}/_{16}$ de superficie, dando como cateto raíz de 3 $^{3}/_{4}$. Tú deseas media superficie; por lo tanto, toma la mitad de raíz de 45 $^{15}/_{16}$ y será [raíz de] 11 $^{31}/_{64}$ de superficie dando como cateto raíz de 3 $^{3}/_{4}$. Eleva al cuadrado y da 14 $^{1}/_{16}$; y esto multiplícalo por la mitad de la superficie del triángulo *abc*, siendo dicha mitad 2 $^{7}/_{64}$, y da 29 $^{679}/_{1024}$; esto divídelo por 11 $^{31}/_{64}$ y resulta 2 $^{1523}/_{2352}$. La raíz de la raíz de 2 $^{1523}/_{2352}$ más 2 es la línea que divide en dos partes iguales al triángulo.

CASO 8. *Dado el triángulo* abc*, en que* ab *es igual a 13,* bc *a 14*, ac *a 15, y dado en él un punto* d *a una distancia de* 2 *de la línea* bc *y separado en 5 de la línea* ac*, y una línea recta que pasa por* d *y que divide dicho triángulo en dos partes iguales, se busca la cantidad de la línea divisoria y en qué parte toca a la línea* ac y *a la línea* bc. En el triángulo *abc* está dado el punto *d* por el cual debe pasar la línea que divide al triángulo. Primero debes trazar el cateto desde el ángulo *a* sobre el lado *be* y sea *ae*; luego tira una línea equidistante de *bc* y que pase por *d* tocando *ae* en el punto *f* y *ac* en el punto *g*. Sea dicha línea *fg*. Luego prolonga *ac* de modo [que se obtenga una línea] tal que multiplicada por *dg* dé la mitad del producto de *ac* por *cb*, que es igual a 105; es decir que, dividido 105 por *dg*, resulta esa línea. Por lo tanto, queremos ver cuánto es *dg*. Tú sabes que el cateto *ae* es igual a 12 y *fe* a 2, pues [*f*] está alejado [en 2] de *bc*; entonces *af* es 10.

Ahora bien, *ae*, que es igual a 12, da *ec* que es 9; si 12 da 9 ¿qué dará 10? Dará 7 $^{1}/_{2}$; y 77 $^{1}/_{2}$ es *fg* y su cateto *fm* es 6, que da *fg* que es igual a 7 $^{1}/_{2}$. Entonces ¿qué te dará el cateto *di* que es igual a 5? Multiplica 5 por 7 $^{1}/_{2}$ y da 37 $^{1}/_{2}$; divide por 6 y resulta 6 $^{1}/_{4}$. Tal es *dg*; divide por él 105 que es la mitad del producto de *ac* por *bc*, y resulta 16 $^{4}/_{5}$; esto multiplícalo por *gc* que es 2 $^{1}/_{2}$ y da 42. Ahora bien, divide 16 $^{4}/_{5}$ en dos partes tales que multiplicada una por la otra dé 42. Por lo tanto di que una

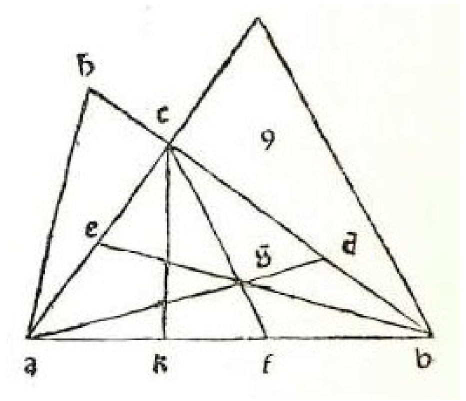
parte es 1 *cosa* y la otra 16 $\frac{4}{5}$ menos 1 *cosa*; 1 *cosa* por 16 $\frac{4}{5}$ menos 1 *cosa* da 16 $\frac{4}{5}$ *cosas* menos 1 *censo*. Iguala las partes y tendrás 16 $\frac{4}{5}$ de *cosa* igual, a 1 *censo* más 42. Divide las *cosas* por mitad y tendrás 8 $\frac{2}{5}$; multiplícalo por sí mismo y da 70 $\frac{14}{25}$; resta el número que es 42 y queda 28 $\frac{14}{25}$. La raíz de 28 $\frac{14}{25}$ menos [el resultado de] la división por 2 de las *cosas*, que es igual a 8 $\frac{2}{5}$, es la *cosa*. Entonces una parte es 8 $\frac{2}{5}$ menos raíz de 28 $\frac{14}{25}$ y la otra es 8 $\frac{2}{5}$ más raíz de 28 $\frac{14}{25}$. Tal es *ch*. Por lo tanto, tira una línea desde el punto *h* y que pase por *d* tocando la línea *bc* en el punto *k*, digo que dicha línea divide el triángulo *abc* en dos partes iguales. Hállese el cateto del triángulo *hkc* que cae desde el punto *k* sobre la línea *hc*, en el punto *l*. Ahora bien, como tú sabes que dividiendo la superficie de todo triángulo por la mitad de su base resulta la cantidad del cateto de dicho triángulo y como se ha dicho antes[129] que la superficie del triángulo *hkc* es igual a 42 y su base *ah* es igual a 8 $\frac{2}{5}$ más raíz de 28 $\frac{14}{25}$, toma la mitad y será 4 $\frac{1}{5}$ más raíz de 7 $\frac{7}{50}$; divide por esto 42. Halla primero el divisor multiplicando 4 $\frac{1}{5}$ más raíz de 7 $\frac{7}{50}$ por 4 $\frac{1}{5}$ menos raíz de 7 $\frac{7}{50}$ y da 10 $\frac{1}{2}$ que es el divisor. Luego multiplica 4 $\frac{1}{5}$ por 42 y da 176 $\frac{2}{5}$; divide por 10 $\frac{1}{2}$ y resulta 16 $\frac{4}{5}$. Ahora eleva al cuadrado 42 y da 1764; multiplica por 7 $\frac{7}{50}$ y da 12.594 $\frac{48}{50}$; esto divídelo por 10 $\frac{1}{2}$ elevado al cuadrado, y resulta 114 $\frac{6}{25}$, es decir [que tenemos] raíz de 114 $\frac{6}{25}$. El cateto *kl* es, así, 16 $\frac{4}{5}$ menos raíz de 114 $\frac{6}{25}$. Tú tienes que *kc* es 21 menos raíz de 178 $\frac{1}{2}$ y *lc* es 12 $\frac{3}{4}$ menos raíz de 64 $\frac{13}{50}$ y *hl es* raíz de 28 $\frac{14}{25}$ más raíz de 64 $\frac{13}{50}$ menos 4 $\frac{1}{5}$. El cateto es 16 $\frac{4}{5}$ menos raíz de 114 $\frac{6}{25}$. Nosotros queremos *hk*, línea divisoria, cuya potencia es igual a la de *hl* más la de *kl*; por lo tanto, multiplica por sí mismo *kl*, que es igual a 16 $\frac{4}{5}$ menos raíz de 114 $\frac{6}{25}$, y da 396 $\frac{12}{25}$ menos raíz de 128.972 $\frac{244}{625}$. Luego multiplica por sí mismo *hl*, que es raíz de 28 $\frac{14}{25}$ más raíz de 64 $\frac{13}{50}$ menos 4 $\frac{1}{5}$, y da 110 $\frac{23}{50}$ más raíz de 7341 $\frac{39}{625}$ menos

raíz de 4434 $\frac{116}{625}$ y raíz de 2012 $\frac{499}{625}$. Sumadas estas multiplicaciones tenemos 506 $\frac{47}{50}$ más raíz de 7341 $\frac{39}{625}$ menos raíz de 4434 $\frac{116}{625}$ y raíz de 2012 $\frac{499}{625}$ y raíz de 128.972 $\frac{244}{625}$. Tal es la potencia de *h* línea que divide el triángulo *abc* en dos partes iguales. Y esto es lo que se pedía.

CASO 9. *Dado un triángulo cuyos lados están en la proporción de 2 a 3 y 3 a 4, y que está circunscrito por un círculo cuyo diámetro es igual a 1, se pregunta por los lados, la superficie y el centro de gravedad.* Puesto que en todo triángulo circunscrito por un círculo entre la potencia del cateto y el producto de los dos lados opuesto a él multiplicados uno por el otro hay la misma proporción que entre el producto de los dos lados multiplicados uno por el otro y la potencia del diámetro del círculo que lo contiene; por lo tanto tómese un triángulo de lados conocidos que se encuentren en esta proporción, es decir, como 2 a 3 y 3 a 4 y sean iguales a 4, 6 y 8. Tal triángulo sea *lmn* y el lado *lm* sea igual a 8, *mn* a 6 y *ln* a 4. Hállese el cateto que cae desde *n* sobre *lm*, que es igual a raíz de 8 $\frac{7}{16}$ y cae a una distancia de *l* igual a 2 $\frac{3}{4}$; luego multiplica los dos lados uno por el otro, es decir, *mn*, que es igual a 6, por *ln*, que es igual a 4, y da 24; eleva al cuadrado y da 576; esto divídelo por 8 $\frac{7}{16}$ que es el cateto [elevado al cuadrado,] y resulta 68 $\frac{4}{15}$ que es la potencia del diámetro del círculo. Entonces la potencia del diámetro es de 68 $\frac{4}{5}$, y uno de los lados es igual a 4, el otro a 6 y el tercero a 8; y el cateto es raíz de 8 $\frac{7}{16}$, que es *nr*. Ahora bien, para los otros dos catetos que caen fuera del triángulo, el que cae desde el ángulo *l* cae a una distancia de 1 desde *n* y es *ls*, igual a raíz de 15; el que cae desde el ángulo *m* cae a una distancia de 1 $\frac{1}{2}$ desde *n* y es *mt*, igual a raíz de 33 $\frac{3}{4}$. Queremos ahora dividir los lados del triángulo, cada uno en partes iguales; *lm* en el punto *o*, tal que *lo* sea igual a 4, y *mn* en el punto *q* tal que *sq* sea igual a 4; luego divide *ln* en el punto *p* tal que *tp* sea igual a 3 $\frac{1}{2}$. Luego traza las

líneas *lq, mp* y *no*, que se intersecarán en el punto *x*. Ahora bien, como el centro de gravedad está en las líneas *lq, mp* y *no*, necesariamente estará en su intersección, que es el punto *x*, el cual digo que es centro de gravedad del triángulo *lmn*, por lo tanto, queremos hallar las cantidades de estas tres líneas, la primera es la que cae sobre la línea *ln* y que cae a una distancia de 4 desde *l*; halla la diferencia que hay desde el punto donde está el cateto [*nr*] al punto *o* es l $\frac{1}{4}$; multiplícala por sí misma y da l $\frac{9}{16}$; esto agrégalo al cateto *nr* que es igual a 8 $\frac{7}{16}$ y da 10. La raíz de 10 es *no*. Luego halla cuánto da desde *q* al lugar donde cae el cateto [*ls*]; da 4; multiplícalo por sí mismo y da 16; súmalo al cateto *ls* que es 15 y da 31. La raíz de 31 es *lq*. Ahora para la línea *mp* ve cuánto da desde *p* al punto donde cae el cateto *mt*; da 3 $\frac{1}{2}$; multiplícalo por sí mismo y da 12 $\frac{1}{4}$; esto sumado a la potencia del cateto *mt*, que es igual a 33 $\frac{3}{4}$, da 46. La raíz de 46 es *mp*. Tienes así las tres líneas, la primera es *no* que es raíz de 10, la segunda es *lq* que es igual a raíz de 31 y la tercera *mp* es raíz de 46. Ahora nosotros queremos las líneas del triángulo *abc* siendo igual a 1 el diámetro del círculo que lo contiene. Ahora bien, como entre el diámetro de un círculo y los lados del triángulo circunscrito existe la misma proporción que entre el diámetro de otro círculo menor o mayor y los lados del triángulo contenido por él, si los triángulos son semejantes. Coloquemos, entonces, en un círculo, cuyo diámetro sea igual a 1, un triángulo cuyos lados estén en la proporción de 2 a 3 y de 3 a 4. Tú tienes que el diámetro del círculo que contiene al triángulo *lmn* es raíz de 68 $\frac{4}{15}$ y da como lado menor del triángulo raíz de 16; por lo tanto eleva al cuadrado el diámetro del círculo *abc* que es igual a 1 y da 1; multiplica 1 por 16 y da 16; divide por 68 $\frac{4}{15}$ y resulta $\frac{15}{64}$. La raíz de $\frac{16}{64}$ es el lado menor, es decir *ac*. Ahora para el segundo multiplica 1 por 36 y da 36; divide por 68 $\frac{4}{15}$ y resulta raíz de $\frac{135}{256}$. Tal es *bc*. Para el tercero duplica el primero que es igual a raíz de $\frac{15}{64}$ y da raíz de

$^{60}/_{64}$. Tal es *ab*, es decir raíz de $^{60}/_{64}$. Halla ahora los catetos del triángulo *abc*, que están en proporción con los catetos del triángulo *lmn*, cuyo [cateto] menor es igual a 8 $^{7}/_{16}$ Esto multiplícalo por 1 y da 8 $^{7}/_{16}$; divide por 68 $^{4}/_{15}$ y resulta $^{225}/_{4096}$ cuya raíz es *ck*. Para el segundo multiplica 1 por 33 $^{3}/_{4}$ y da 33 $^{3}/_{4}$; divide por 68 $^{4}/_{15}$ y resulta $^{2025}/_{4096}$. La raíz de $^{2025}/_{4096}$ es *bi*. Para el tercero que es 15 multiplica 1 por 15 y da 16; divide por $^{4}/_{15}$ y resulta raíz de $^{225}/_{1024}$. Tal es *ah*. Tienes así los tres catetos: el primero es *ck* que es igual a raíz de $^{225}/_{4096}$ y cae junto a *a* [a una distancia de] raíz de $^{6655}/_{36864}$; y *ah* es raíz de $^{225}/_{1021}$ y cae junto a [a una distancia de] raíz de $^{135}/_{9216}$; y *bi* es raíz de $^{2025}/_{4096}$ y cae junto a *c* [a una distancia de] raíz de $^{1215}/_{36864}$. Ahora divide en partes iguales los tres lados del triángulo *abc*; *ab* en el punto *f, be* en el punto *d* y *ac* en el punto *e*; luego tira *ad, be*, y *cf* que se intersecan en el punto *g*, y cuya cantidad buscamos. Por lo tanto di: “si 68 $^{4}/_{5}$ de diámetro da *no* que es igual a 10, ¿qué dará 1 de diámetro?”. Multiplica 1 por 10 y da 10; divide por 68 $^{4}/_{15}$ y resulta $^{150}/_{1024}$. La raíz de esto es la línea *cf*. Luego di: “si 68 $^{4}/_{15}$ da 31, ¿qué dará 1?”. Multiplica 1 por 31 y da 31. Divide por 68 $^{4}/_{15}$ y resulta $^{465}/_{1024}$. La raíz de $^{465}/_{1024}$ es *ad*. Y si 68 $^{4}/_{15}$ da 46, ¿qué dará 1? 1 por 46 da 46; divide por 68 $^{4}/_{15}$ y resulta $^{690}/_{1024}$. La raíz de $^{690}/_{1024}$ es *be*. Tienes así las cantidades de las tres líneas que se intersecan en el punto *g*; y digo que este punto es centro de gravedad del triángulo *abc*. Queremos ahora ver cuánto da desde *g* a cada ángulo. Toma $^{2}/_{3}$ de cada una de las tres líneas, pues en todo triángulo las líneas que salen desde sus ángulos y terminan en la mitad de los lados opuestos a ellos se



intersecan en los ${}^{2}/_{3}$. Por lo tanto, toma ${}^{1}/_{3}$ de la línea *cf*, que es raíz de ${}^{150}/_{1024}$; dividiendo por 9 resulta raíz de ${}^{150}/_{9216}$. Tal es *fg*; duplica dicha raíz y da raíz de ${}^{600}/_{9216}$. Tal es *eg*. Toma ${}^{1}/_{3}$ de *ad* que es raíz de ${}^{465}/_{1024}$; divide por 9 y resulta ${}^{465}/_{9216}$. La raíz de ${}^{465}/_{9216}$ es *dg*. Duplica dicha raíz y da raíz de ${}^{1860}/_{9216}$. Tal es *ag*. Toma ${}^{1}/_{3}$ de *be*, que es raíz de ${}^{600}/_{1024}$, divide por 9 y resulta raíz de ${}^{690}/_{9216}$. Tal es *eg*. Duplica dicha raíz y da ${}^{2760}/_{9216}$; tal es *bg*. Entonces *bg* es raíz de ${}^{2760}/_{9216}$; *eg* es raíz de ${}^{690}/_{9216}$; *ag* es raíz de ${}^{1860}/_{9216}$; *dg* es raíz de ${}^{465}/_{9216}$; *eg* es raíz de ${}^{600}/_{9216}$; *fg* es raíz de ${}^{150}/_{9216}$. Y los dados del triángulo son: *ac*, raíz de ${}^{15}/_{64}$; *be*, raíz de ${}^{135}/_{256}$; raíz de ${}^{60}/_{64}$. Ahora bien, para la superficie multiplica el cateto *ek* que es raíz de ${}^{225}/_{4096}$, por la mitad de *ab*, que es raíz de ${}^{15}/_{64}$ y da raíz de ${}^{3375}/_{262144}$. Tal es la superficie del triángulo *abc* cuyos lados están en proporción como 2 a 3 y 3 a 4 siendo 1 el diámetro del círculo que lo circunscribe. Y esto era lo propuesto.

CASO 10. *Dada una columna redonda circular cuyo diámetro, es decir, el de cada base, es igual a 4 y otra columna de igual grosor que la horada ortogonalmente, se pregunta qué cantidad se saca de la primera columna con esa horadación, es decir, qué cantidad se saca de la columna, con ese agujero*. Debes saber que la columna horadada en la curva donde comienza el agujero y en la curva opuesta donde termina ofrece un corte en línea recta, y el eje de la columna que horada pasa por el eje de la horadada en ángulo recto, y sus líneas forman un cuadrado, en su curvatura, y por arriba y por abajo se unen en dos puntos, es decir uno arriba y otro abajo. Como ejemplo, sea *h* la columna horadada y *g* y la columna que la horada, el agujero sea *abcd*, y los puntos de contacto de su curvatura sean *e* y f. Hallaremos la cantidad de dicho agujero. Se ha dicho que cada columna es 4 de grosor; entonces el cuadrado *abcd* es 4 de lado; este lado multiplícalo por sí mismo y da 16; también *ef* que es el grosor de la columna es igual a 4, que multiplicado por la superficie de

la base que es 16 da 64. Esto divídelo por 3 y resulta 21 $\frac{1}{3}$; duplica y da 42 $\frac{2}{3}$. Esto, 42 $\frac{2}{3}$, es lo que se saca de la columna *h* con dicho agujero. Prueba: tú sabes que dichas columnas forman en el agujero un cuadrado que es *abcd*; por lo tanto haz una superficie cuadrada de igual tamaño y sea también *abcd*. En ella haz un círculo que será *iklm* y sea su centro *n*; luego haz otra superficie cuyos dos lados opuestos sean, cada uno, iguales a la diagonal *ac* del agujero de la columna y los otros dos lados sean iguales cada uno a *ab*. Sea tal superficie *tuxy*; describe en ella un círculo proporcionado que toque cada lado de tal cuadrado en los puntos *o pqr* y sea *s* su centro. Digo que entre el cuadrado *abcd* y el cuadrado *tuxy* existe la misma proporción que hay entre el círculo *iklm* y el círculo *opqr*; y entre el círculo *iklm* y su cuadrado *abcd* existe la misma proporción que hay entre el círculo *opqr* y su cuadrado *tuxy*, según la quinta del tercero de *Arquímedes, De conoidalibus*. Ahora bien, divide el cuadrado *abcd* en partes iguales con la línea *km* y luego tira *kl* y *ml*. Se formará el triángulo *klm*. Divide también en partes iguales el cuadrado *tuxy* con la línea *pr*, y luego traza *pq* y *qr*. Se formará el triángulo *pqr*. Digo que entre el triángulo *klm* y el triángulo *pqr* existe la misma proporción que hay entre el cuadrado *abcd* y el cuadrado *tuxy* y que entre el triángulo *klm* y su cuadrado *abcd* existe la misma proporción que hay entre el triángulo *pqr* y su cuadrado *tuxy*. Ahora bien, se dijo antes que entre el círculo *iklm* y la superficie *abcd* había la misma proporción que entre el círculo *opqr* y la superficie *tuxy*; se sigue entonces, según ciencia común, que entre el triángulo *klm* y su círculo *iklm* existe la misma proporción que entre el triángulo *pqr* y el círculo *opqr*. Comprendido esto haremos las figuras corpóreas: la primera sea la esfera señalada con *ckmf* y su eje sea *ef* y la otra alrededor del cuadrado *tuxy*.

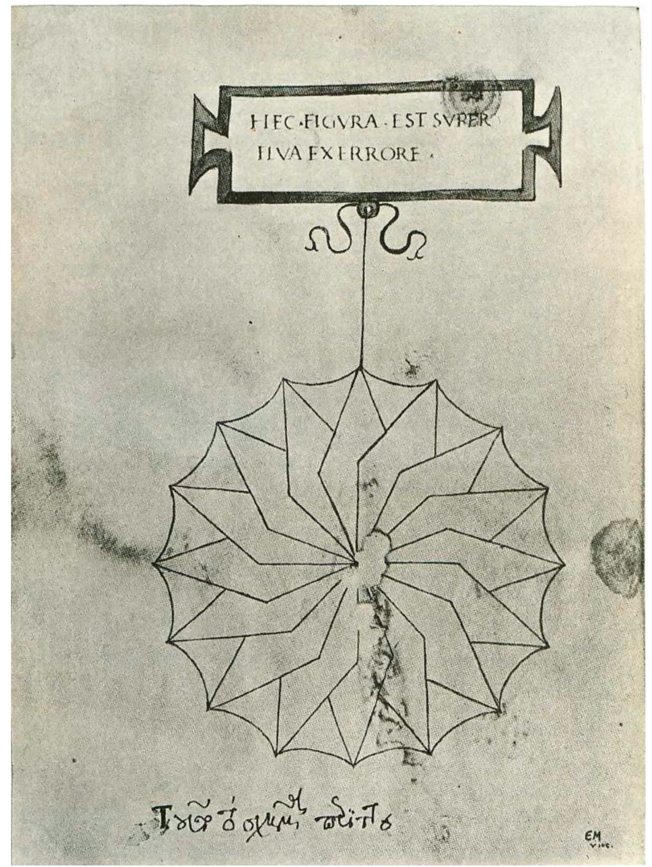
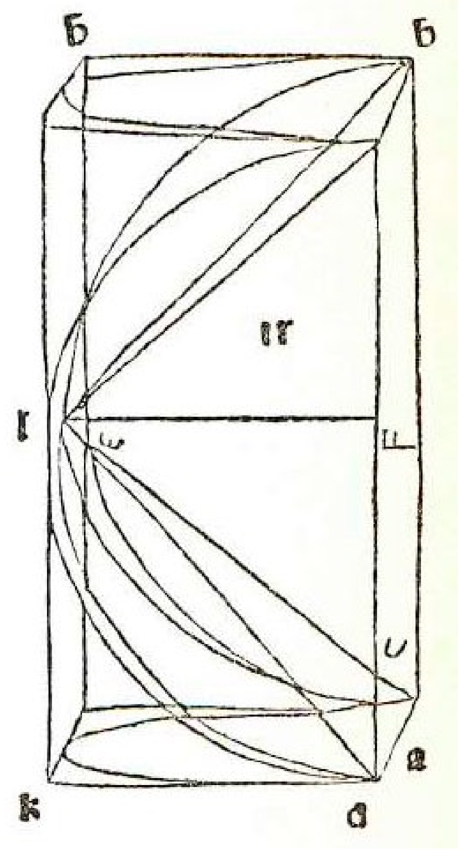


Ilustración del manuscrito de *La Divina Proporción*. Biblioteca de Ginebra.

Tenemos dos círculos; uno es *trxs* y el otro *irus*; ellos se intersecan en el punto *r* y en el punto *s*. En dichas figuras corpóreas haré en cada una, una pirámide en la esfera *ekmf*; trazaré *km* circularmente, luego trazaré k*e* y *em* y será *kem* la pirámide sobre la base redonda *klmi*; luego haré la otra pirámide en la otra figura corpórea que será *tryrxrur*. Dichas pirámides están en proporción entre sí tal como lo están sus madres, es decir las figuras corpóreas en las cuales se construyeron, de la misma manera que se mostró antes en las superficies planas, como el círculo *trxs* es igual al círculo *opqr* de la superficie *tuxy* y los lados *tr* y *rx* de la pirámide, son iguales a dos lados del triángulo *pqr*, es decir *pq, qr*; y *kem* lados de la pirámide de la

esfera es decir *ke, em* son iguales a dos lados del triángulo *klm* del círculo *iklm*, es decir *kl, lm*. Entonces concluimos que la proporción entre la pirámide *tryrxrur* y su cuerpo *trus* es la misma que la de la pirámide *kem*, cuya base *iklm* es circular, y su cuerpo esférico *kemf*. Entonces, conforme a la décimotercera del primero del *De sphaera et cono* de ARQUIMEDES donde dice que toda esfera es cuádrupla con respecto a su cono cuya base es igual al círculo mayor de la esfera, y cuyo eje es igual al semidiámetro, toma la base *tuxy* que es igual a 4 de lado, multiplícalo por sí misma y da 16, esto multiplícalo por su eje que es 2 y da 32 y esto divídelo por 3 y da 10 ⅔. El cuerpo correspondiente *trxs* es cuatro veces tanto; por lo tanto multiplica 10 ⅔ por 4 y da 42 ⅔, según dijimos antes, y tienes que con ese agujero se saca 42 ⅔ de la columna *h*.

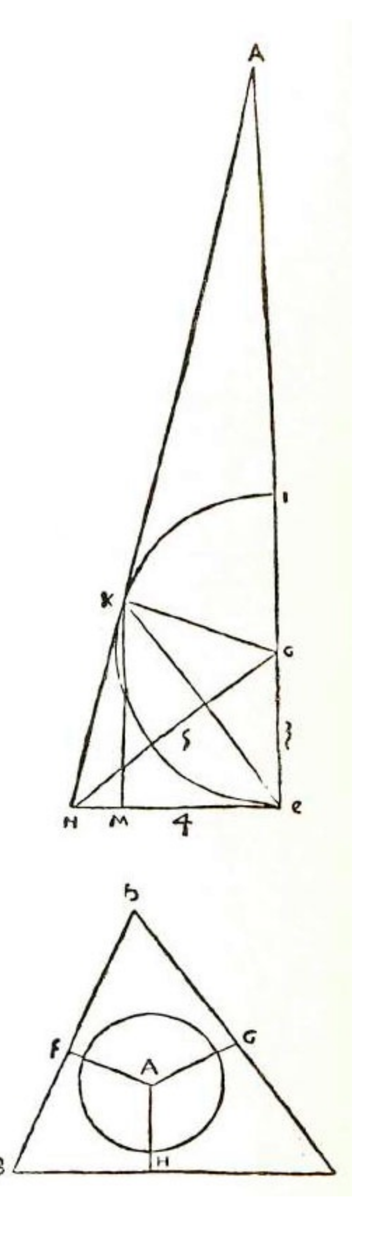
CASO 11. *Dada una bóveda de crucería en la cual cada cara es igual a 8 y que es alta 4, tanto en la culminación de los arcos como en el medio de la bóveda, se pregunta por su superficie cóncava*. Debes saber que la bóveda de crucería está compuesta por dos medios cañones que se intersecan uno con otro formando en su unión cuatro puntas a manera de cuatro puntas de casquetes y cuyos basamentos sobre las cuatro bases se unen en punta, dos a dos, y terminan en un solo punto, como se ve en la demostración. Su base es *abcd* y el primer arco es *agb*, el segundo *bhc*, el tercero *cid*, el cuarto *dka* y la crucería *aecbed* y el eje es *ef*. De esta bóveda se desea tener la superficie cóncava de estos dos medios cañones es decir *agbcid* y el otro *akdbhc* siendo el diámetro de cada uno igual a 8 y la altura igual a 4 y formando estos medios cañones unidos, un solo cañón redondo perfecto cuyo diámetro es igual a 8 siendo también 8 la longitud, y su superficie cóncava es igual a 201 $^1/_7$, de la cual queremos obtener la superficie de 4 casquetes *aeb, bec*, *ccd, dea*. Ahora bien, con la ayuda de la precedente, en que tienes que entre la pirámide redonda y su media esfera existe la misma proporción que entre la pirámide cuadrada y el cuerpo circular sobre la base cuadrada, siendo de una misma altura, y por la trigésimo tercera del primero del *De sphaera et cono* de ARQUIMEDES, en que la esfera es el cuádruplo



de su cono cuya base sea el círculo mayor de la esfera y cuyo eje sea igual al semidiámetro de la misma. Tenemos entonces que la media esfera es el doble de su cono. Ahora nosotros tenemos el cono *aebecede* cuya base *abcd* tiene cada lado igual a 8 y cuya superficie es 64, que multiplicada por el eje, que es igual a 4, da 256; dividido esto por 3 resulta 85 ⅓. Tal es la pirámide *aebecede*. Duplícala y da 170 ⅔, que es la cuadratura del cuerpo *aec*. Pero nosotros queremos la superficie de sus cuatro casquetes; multiplica por lo tanto 170 ⅔ por 3 y da 512; esto divídelo por el eje *ef*, que es igual a 4 y resulta 128. Réstalo de la superficie del cañón que es 201 ⅐ y queda 73 ⅐. Tal es la superficie cóncava de la bóveda de crucería en la cual cada cara es 8.

CASO 12. *Dada una pirámide triangular* abcd *cuya base es* bcd *y cuyo vértice es* a, *siendo* bc *igual a 14*, bd *a 13 y* cd *a 15, en dicha base descansa una esfera cuyo eje es 6 y el punto de apoyo està separado en 4 de cada lado de la base, tocando la superficie de la esfera cada lado de la pirámide. Se pregunta por el lado* ab, ac *y por el lado* ad. ℜ Tú tienes la pirámide de cuatro bases triangulares *abcd* cuya base *bcd* tiene el lado *bc* igual a 14; *bd* a 13, *dc* a 15 y el punto *e* hecho en la base, separado de cada lado en 4. Sobre dicho punto *e* lleva la perpendicular a la línea *be* y sea *eh* que será igual a 4; también lleva la perpendicular desde el punto *e* a *bdf* y sea *ef* que será igual a 4. Lo mismo haz con respecto a *cd* y sea la perpendicular *eg* que también será igual a 4. Luego coloca una punta del compás en el punto *e* y traza con la otra un círculo cuyo diámetro sea 6 de la esfera que supusimos que tocaba en el punto *e*. Ahora bien sabemos que *eh* es 4 y que la línea que sale de *h* y toca también la esfera tiene la misma cantidad que *eh, ef* y *eg*. Haz entonces una línea que será *eh* y será igual a 4, luego sobre *e* lleva la perpendicular sin término y sobre ella fija el punto *o* tal que *eo* sea igual a 3; y sobre el punto *o* pon una punta del compás y con la otra traza el círculo con la

cantidad de *eo* que es 3; se hará un semicírculo que será *eki*. Luego tira una línea desde el punto *h*, que toque el semicírculo en el punto y la línea perpendicular en el punto *a*. Luego, desde el centro *o*, tira *oh*, cuya potencia, por la penúltima del primero de EUCLIDES es igual a la suma de las potencias de las dos líneas *he* y *eo*. Tú tienes que *he* es igual a 4 cuya potencia es 16; y *eo* es 3 cuya potencia es 9; sumando da 25. La raíz de 25 es *ho*, es decir 5. Tú tienes un triángulo del cual un lado es 3, otro 4 y el tercero 5, halla luego el cateto que cae sobre el lado igual a 5 y hallarás que es igual a raíz de 5 $^{19}/_{2}$ duplica esta raíz y da 23 $^{1}/_{25}$ mejor dicho, raíz de 23 $^{1}/_{25}$ que es *ke*. Has hecho así un triángulo que es *hek* halla su cateto que cae sobre *he*. La potencia de *he* es 16 y la de *hk* es 16; sumadas dan 32; resta la potencia de *ke* que es 23 $^{1}/_{25}$ y queda 8 $^{24}/_{25}$; esto divídelo por el doble de la base que es 4, es decir por 8; divide entonces 8 $^{24}/_{25}$ por 8 y resulta 1 $^{3}/_{25}$; esto multiplícalo por sí mismo y da 1 $^{159}/_{625}$; réstalo de la potencia de *hk*, que es 16 y queda 14 $^{466}/_{625}$, y su raíz es el cateto *km*. Entonces la potencia de *hm* que es 1 $^{159}/_{625}$ da de cateto raíz de 14 $^{466}/_{625}$; ¿qué te dará la potencia de *he* que es 16? Multiplica 16 por 14 $^{466}/_{625}$ y da 235 $^{581}/_{625}$; esto divídelo por 1 $^{159}/_{625}$ y resulta 188 $^{4}/_{49}$. Tal es la



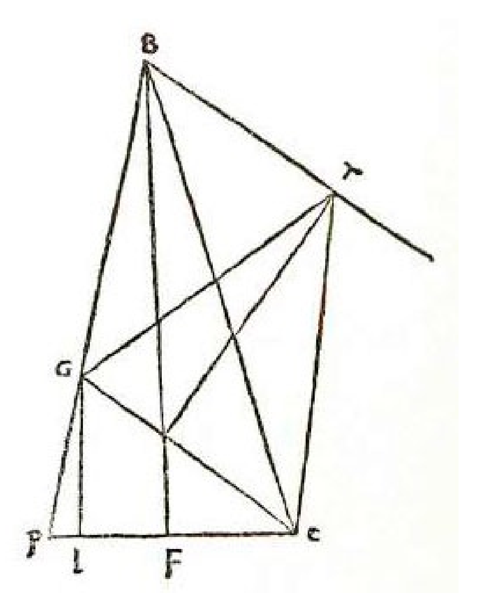
potencia del cateto *ae*, pues entendemos que *ae* se levanta sobre *e* perpendicularmente, como se ve en la segunda figura. En ella está representada la mitad de la esfera que es *eki*, siendo su centro *o*; y se dijo que *he* era igual a 4 y también que *hk* y *eo* eran iguales a 3, que es medio eje de la esfera. La potencia de *ho* es igual a la suma de las potencias de las dos líneas *he* y *eo*; pues el ángulo *e* es recto; *he* que es 4 da como potencia 16 y *eo* es 3 y la potencia es 9; sumadas dan 25. Tú tienes el triángulo *heo*; halla el cateto que cae sobre la línea *ho* y que hallarás es igual a raíz de 5 $^{19}/_{25}$; duplica esta raíz y da raíz de 23 $^{1}/_{25}$. También has hecho un triángulo que es *hke*; luego halla el cateto que cae desde el punto *k* sobre la línea *he* en el punto *m*; será *km*, igual a raíz de 14 $^{466}/_{625}$; y *hm* es raíz de 1 $^{159}/_{625}$, como dijimos. Entonces raíz de $^{1159}/_{625}$ da raíz de 14 $^{466}/_{625}$ de cateto; ¿qué te dará 4? Multiplica esto por sí mismo y da 16; y 16 por 14 $^{466}/_{625}$ da 235 $^{581}/_{625}$; divide por 1 $^{159}/_{625}$ y resulta 188 $^{4}/_{49}$. La raíz de 188 $^{4}/_{49}$ es el cateto *ae*. Nosotros queremos *ab*; por lo tante vuelve a la primera figura y ve cual es la potencia de *eb*, cuya potencia es igual a la de *bh* más la de *he*. Por lo tanto multiplica [por sí mismo] *bh*, que es 6, y da 36; *eh* es igual a 4 cuya potencia es 16; suma y da 52. La potencia de *be*, es 52, que sumada a la de *ae* da 240 $^{4}/_{49}$. La raíz de 240 $^{4}/_{49}$ es *ab*. Ahora para el lado *ac*, como la potencia de *ce* es igual a la suma de las potencias de *ch* y *he*, y *ch* es igual a 8 cuya potencia es 64 y *he* da como potencia 16, potencias que sumadas dan 80, une con el cateto y da 268 $^{4}/_{49}$. Tal es la potencia de *ac*. Para la linea *ab* tú sabes que la potencia de *de* es igual a la suma de las potencias de las dos líneas *dg* y *cg; dg* es igual a 7 cuya potencia es 49, y la potencia de *eg*, es 16; sumadas [ambas potencias] dan 65. La raíz de 65 es *de*; su potencia sumada a la de *ae* da 253 $^{4}/_{49}$, cuya raíz es *ad*. Así, pues, digo que en la pirámide triangular *abcd* de la cual un lado de la base es decir, *db* es igual a 13, y *bc* a 14 y *cd* a 15, y en la cual hay una esfera cuyo eje es igual a 6 y que toca con su

superficie cada cara de la pirámide en un punto, el lado *ab* es raíz de 240 $\frac{4}{49}$, *ac* es raíz de 268 $\frac{4}{49}$ y *ad* es raíz de 253 $\frac{4}{49}$. Y esto es lo que se pedía.

CASO 13. *Dada una pirámide cuya base es cuadrada siendo triangulares las otras caras y siendo* bcde *su base y a su vértice y cada lado de la base igual a 6, y dada una superficie plana que la secciona transversalmente cortando* ab *y* ae *a una altura de 4 desde la base, terminando en el punto* c *y en el punto* d, *lados de la base, se pregunta por las partes de la pirámide, siendo su eje igual a 12.*

Haz así: construye la pirámide *abacadae* y el cateto *af* y la superficie corte *ab* en el punto *g* y *ae* en el punto *h* terminando en los puntos *c* y *d; y gc* corte el eje *af* en el punto *t*; y sea 4 la distancia de *gh*, desde la base. Tú tienes que en la base cada lado es igual a 6 y que el cateto *af* es igual a 12; entonces tirando desde el punto *g* una [línea] equidistante de la base, cortará *ac* en el punto *k* tal que *gk* será igual a 4; y la perpendicular que cae desde el punto *g* caerá por dentro de la línea *eb* [a una distancia de] 1; y dentro de la línea *bc* también [a una distancia de] 1, y será *gl*; la otra que cae desde el punto *h* hará lo mismo y será *hm*. Luego traza la línea *lm* que corta *be* en el punto *n* y la línea *ed* en el punto *o*; luego tira la equidistante de la línea *be* y que pasa por *l* y divide *cb* en el punto *p* y la línea *cd* en el punto *q*; y la otra equidistante de *de* que corta *be* en el punto *r y cd* en el punto *s*. Tal como puedes ver en la figura plana, la base tiene dos pirámides una es *gbgpglgn*, cuya base es *bpln*; y la otra pirámide es *hehohmhr* y su base es *eomr*, siendo el lado de cada una igual a 1, y su eje a 4. La cuadratura de estas dos pirámides es igual [, en conjunto,] a 2 $\frac{2}{3}$. Ahora bien, *lp* es 1 y *pr* es 4, lo mismo es *im*, y *lg* es 4; multiplica *lp* por *pr* y da 4; y 4, que es la base, por *lg*, que es la altura y es igual a 4, da 16; toma la mitad que es 8, que sumado a 2 $\frac{2}{3}$ da 10 $\frac{2}{3}$. Tal es la cuadratura de *benogh*. Ahora halla la cuadratura de *lnoc* y *g* que forma una pirámide que es *glgngqgc*; multiplica entonces *ln* que es igual a 1

por *nc* que es 5 y da 5; esto multiplícalo por *lg* que es 4 y da 20. Como es una pirámide toma $\frac{1}{3}$ que es 6 $\frac{2}{3}$. Lo mismo es la otra pirámide *hmhohdhs*; 6 $\frac{2}{3}$ más 6 $\frac{2}{3}$ da 13 $\frac{1}{3}$; suma a 10 $\frac{2}{3}$ y da 24. Ahora halla la cuadratura de *ghlmqs*; tú sabes que *lm* es 4 y *lq* es 5; 4 por 5 da 20; esto multiplícalo por *gl*, que es igual a 4, y da 80; toma la mitad que es 40 y sumándole 24 da 64. Tal es la parte de la base y la parte de arriba hacia el vértice *a* es 80 y toda la pirámide es 144. Dicha pirámide está dividida por la superficie plana *ghcd* y *bcdegh* es igual a 64 y *aghede* es igual a 80. Ahora, de otro modo, para que se puedan dividir las pirámides redondas, que no podrían dividirse por ese camino, haremos de esta otra manera: tú debes saber que la línea *ge* es raíz de 41 y que *gl* es 4 y *lc* 5. Halla el cateto del triángulo *glc* que cae sobre la línea *gc* desde el punto *l* y que hallarás ser igual a raíz de 9 $\frac{31}{41}$ y sea *lu*. Ahora haz una pirámide sobre *ge*, cuyo eje sea *tx* y esté en proporción con el cateto *lu*, como *lg*, que es igual a 4, con *at* que es igual a 9 $\frac{3}{5}$; esto elévalo al cuadrado y da 92 $\frac{4}{25}$; por otra parte, *gl*, que es 4, da elevado al cuadrado 16. Por lo tanto halla la cantidad de *tx* así: multiplica 9 $\frac{31}{41}$ por 92 $\frac{4}{25}$, y da 899 $\frac{125}{1025}$; esto divídelo por 16 reducido a 1025 avos, vale decir por $\frac{16400}{1025}$; divide entonces $\frac{16400}{1025}$ y resulta 56 $\frac{8}{41}$. Tal es la potencia del eje *tx*; ahora hay que hallar la superficie de la base *ghcd* en que *gh* es 4 y *cd* 6. Suma y da 10; toma la mitad, y da 5; eleva al cuadrado da 25; y 25 por 41 da 1025, que es la superficie de la base *ghcd*;



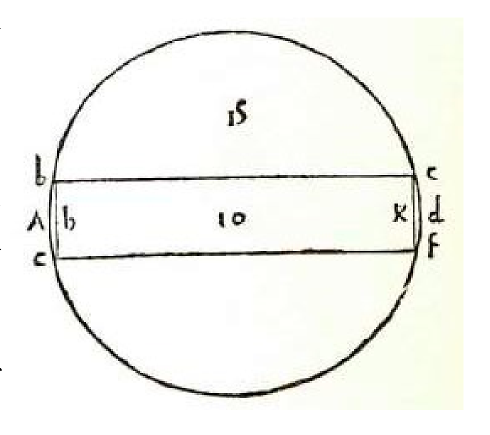
multiplícala por el [cuadrado del] eje *tx* que es 56 $\frac{8}{41}$ y da 57.600; divide por 3 elevado al cuadrado, es decir por 9, y resulta 6400. La raíz de 6400, que es 80, es *agacadah* que es la parte de arriba de la pirámide, y *gbhecd* la parte de abajo es el resto hasta completar 144, es decir 64 como dijimos antes. Ahora bien, si la pirámide fuera redonda tendría redonda la base. Ésta sería raíz de 632 $\frac{653}{19}$; multiplícala por 56 $\frac{8}{41}$ y da 35.559 $\frac{9}{49}$; esto divídelo por 9 y resulta raíz de 3951 $\frac{1}{49}$. Di que tal será la parte de arriba de la pirámide y la de abajo será el resto hasta completar 113 $\frac{1}{7}$. Número que viene a ser la parte de arriba: 62 $\frac{6}{7}$; y lª de abajo: 50 $\frac{2}{7}$. Y la pirámide *age* es igual a la pirámide *xgc* porque están sobre una misma base y entre dos líneas paralelas, por la trigésimo séptima del primero de EUCLIDES, si bien se refiere a superficies; en el vigésimo nono del undécimo se refiere a sólidos.

CASO 14. *Dada una pirámide triangular cuya base es* bcd *de la cual* bc *es 14 y* bd *13 y* cd *15 y el eje* af *es 16, y en la cual está encerrada una esfera, la mayor que se le pueda colocar, se busca el eje de dicha esfera y los lados de la pirámide*. Tú tienes la pirámide *abacad* cuya base es *bcd* de la cual *bc* es 14, *bd* 13 y *cd* 15; sobre ella describe un círculo que toque cada lado de la base y sea *f* su centro, y será *af* igual a 16, que es el eje de la pirámide. Desde *f* tira la perpendicular sobre cada lado de la base; dividirá *bc* en el punto *e, bd* en el punto *g* y *cd* en el punto *h, fe* será igual a 4 y así todas las demás porque el diámetro del círculo que se describe en dicha base es igual a 8. Haz entonces una línea que sea igual a 8, es decir k*l*; sobre ella haz el triángulo cuyo cateto sea 16, es decir *mn*, y que divida *kl* en partes iguales en el punto *n*; luego traza *mk* y *ml* y sea el triángulo *m* en él describe el círculo que toca cada lado del triángulo, *kl* en el punto *n, mk* en el punto *o* y *ml* en el punto *p* y sea *q* su centro. Desde *p* y pasando por *q* tira la línea *pr*; luego, desde el punto *l*, lleva la

línea que pasa por *k* hasta *r*. Digo que *pr* es 16 y cae perpendicularmente sobre *ml*, porque pasa por el centro del círculo y termina en el contacto de la línea *ml*, por la decimoséptima[130] del tercero de EUCLIDES. Por otra parte, *pl* es igual a 4 porque es igual a *ln* y entre *rp* y *pl* existe la misma proporción que entre *rn* y *nq*. Ve cuánto es la línea *rl* cuya potencia sabes que es igual a la suma de las potencias de las dos líneas *rp* y *pl; rp* es 16 cuya potencia es 256, y *pl*, es 4, cuya potencia es 16; sumadas dan 272. La raíz de 272 es *rl*; y *rn es* raíz de 272 menos *nl*, que es 4. Ahora bien, se ha dicho que entre *rp*, que es 16, y *pl*, que es 4, existe la misma proporción que entre *rn*, que es raíz de 272 menos 4, y *nq*. Por lo tanto di: "si 16, que es r*p*, da 4, que es *pl*, ¿qué da raíz de 272 menos 4, que es *rn*?". Multiplica 272 por 4 elevado al cuadrado y da 4352; esto divídelo por 16 elevado al cuadrado y resulta raíz de 17; luego multiplica 4 por *menos* 4 y da [*menos*] 16; divide esto por 16 y da *menos* 1 y resulta 1. Entonces, *qn* es raíz de 17 menos 1, que es medio diámetro de la esfera; todo el eje es raíz de 68 menos 2, y así tienes que el eje de la esfera que está en la pirámide *abcd*, cuya base *bed* tiene un lado igual a 14, otro a 13, y el otro a 15, es raíz de 68 menos 2; y la potencia del lado *ab* de la pirámide es igual a la suma de las potencias de las dos líneas *af* y *bf*, que es igual a la suma de las potencias de *fe* y *be*. Tú sabes que *be* es igual a 6 cuya potencia es 36 y que *fe* es 4 que da [como potencia] 16; sumado a 36 da 52. Tal es la potencia de *bf* que sumada a la potencia *deaf* que es 256 da 308. La raíz de 308 es *ab*, y la potencia del lado *ac* es igual a la de *fc* más la de *af*; la de *cf* es igual a la de *ce* más la de *ef, ce* es 8, cuya potencia es 64, y *ef* es 4, cuya potencia es 16, que sumada con 64 da 80. Tal es la potencia de *fc*; ésta sumada a la potencia de *af*, que es 256, da 336, y la raíz de 336 es *ac*. Ahora, para el lado *ad*, su potencia es igual a la de *af* más la de *fd*, siendo la de *fd* igual a la de *dg* más la de *gf*, y siendo *gf* igual a 4, cuya potencia es igual a 16; *dg* es

7, cuya potencia da 49, que sumado con 16 da 65. Tal es *df* que sumado a la potencia de *af* que es 256 da 321. La raíz de 321 es *ad*. Y esto es lo que se pedía.

CASO 15. *Dado un cuerpo esférico cuyo eje es 10, si se lo horada en el medio con una barrena atravesándolo de un lado al otro, y si el diámetro del agujero es igual a 2, se pregunta qué es lo que se saca de la cuadratura del cuerpo esférico con esa horadación.* ℜ Tú tienes el cuerpo esférico *abcdef* cuyo eje *ad* es 10 y su centro es *g*, y el agujero hecho por la barrena es *bcef*, y la línea *bc*, de un costado, es diámetro del agujero y *cf* es diámetro del otro costado, siendo cada línea igual a 2; el eje *ad* corta *be* en el punto *h* y la línea *cf* en el punto *k*. En las líneas que se intersecan en los círculos, una parte de una línea por la otra parte da cuanto una parte de la otra línea por su otra parte; entonces, *ck* por *kf* da tanto cuanto *dk* por *ka*. Tú sabes que *ck* es igual a 1 y *kf* a 1; si tú multiplicas 1 por 1 da 1; por lo tanto haz de *ad*, que es 10, dos partes tales que, multiplicadas una por la otra, den 1. Supón que una parte, es decir *kd*, sea 1 *cosa* y que *ak* sea 10 menos 1 *cosa*; multiplica 1 *cosa* por 10 menos 1 *cosa* y da 10 *cosas* menos 1 *censo*; pero tú quieres 1. Restaura las partes dando a cada parte 1 *censo* y tendrás 10 *cosas* igual a 1 y 1 *censo*. Divide las *cosas* por mitad y serán 5; multiplícalas por sí mismas y da 25. Resta el número que es 1 y queda 24. Restando la raíz de 24 a[l resultado de] la división por mitad de las *cosas*, que dio 5, da la *cosa* que dijimos correspondía a *kd*. Entonces *kd* es 5 menos raíz de 24 y *ck* es 1; y tú quieres *cd* cuya potencia es igual a la de *kd* más la de *c* multiplica por lo tanto 5 menos raíz de 24 por sí mismo y da 49 menos raíz de



2400; ahora 1 por 1 da 1; suma y da 50 menos raíz de 2400; tal es la potencia de *cd*; esto duplícalo y da 200 menos raíz de 38.400; reduce a una superficie redonda y tendrás 157 $\frac{1}{7}$ menos raíz de 23.706 $\frac{6}{49}$; multiplica 157 $\frac{1}{7}$ por *gd*, que es 5, y da 785 $\frac{5}{7}$; divide por 3, y resulta 261 $\frac{19}{21}$; luego multiplica 23.706 $\frac{6}{49}$ por 5 elevado al cuadrado y da 592.653 $\frac{30}{49}$; divide por 3 elevado al cuadrado y resulta raíz de 65.850 $\frac{50}{147}$. Tal es el cono *gcdf* [, es decir, 261 $\frac{19}{21}$ menos raíz de 65.850 $\frac{50}{147}$].

Tú quieres la parte *cdf*; ve, pues, cuánto es el cono *gcf* que hallarás ser igual a raíz de 26 $\frac{50}{147}$ [……][131] quedará la parte *cdf* igual a 261 $\frac{19}{21}$ menos raíz de 26 $\frac{50}{147}$ y raíz de 65.850 $\frac{50}{120}$, que con la otra parte *bae* dará 523 $\frac{12}{21}$ menos raíz de 274.042 $\frac{38}{49}$, a la cual debe agregarse la cuadratura de *bcef*. Sabes que *gd* es 5 menos raíz de 24; restándole *kd* queda *gk* igual a raíz de 24 y *gh* es lo mismo; entonces *hk* será raíz de 96; *cf* será 2; multiplicado por sí mismo da 4; reducido a superficie redonda da 3 $\frac{1}{7}$; elévalo al cuadrado y da 9 $\frac{43}{49}$; multiplícalo por que es 96 y da raíz de 948 $\frac{12}{49}$ que sumada a 525 $\frac{1}{7}$ menos raíz de 274.042 $\frac{38}{40}$ da la raíz de 948 $\frac{12}{49}$. La raíz de lo que queda de 523 $\frac{9}{71}$ restándole raíz de 242.750 $\frac{34}{49}$ es lo que se saca de la cuadratura del cuerpo esférico cuyo eje es 10, con dicho agujero, y esto es lo que se pedía.

CASO 16. *Dado un tonel en que los fondos son de diámetro igual a 2, y la parte cacuminal da $\frac{1}{4}$* [de más] *y entre los fondos y la parte cacuminal hay 2 $\frac{2}{9}$ y que es de largo 2, se pregunta cuál es su cuadratura*. Haz así: multiplica el [diámetro del] fondo por sí mismo, es decir 2, y da 4; luego multiplica por sí mismo 2 $\frac{2}{9}$, [diámetro] entre la parte cacuminal y el fondo, y da 4 $\frac{76}{81}$; suma y da 8 $\frac{76}{81}$; luego multiplica 2 por 2 $\frac{2}{9}$ y da 4 $\frac{4}{9}$; súmalo a 8 $\frac{76}{81}$ y da 13 divide por 3 y resulta 4 $\frac{112}{243}$, mejor dicho, raíz de 4 $\frac{112}{243}$, que multiplicada por sí misma da 4 $\frac{112}{243}$. Recuérdalo. Tú tienes que multiplicando 2 $\frac{2}{9}$ por sí mismo da 4 $\frac{76}{81}$; luego

multiplica 2 $\frac{1}{4}$ por sí mismo y da 5 $\frac{1}{16}$; sumado a 4 $\frac{76}{81}$ da 10 $\frac{1}{1296}$; luego multiplica 2 $\frac{2}{9}$ por 2 $\frac{1}{4}$; da 5; suma y da 15 $\frac{1}{1296}$; divide por 3 y resulta 5 $\frac{1}{3888}$, es decir [que tenemos] raíz de 5 $\frac{1}{3888}$, que multiplicada por sí misma da 5 $\frac{1}{3888}$; súmalo lo de arriba, que es 4 $\frac{112}{243}$ y da 9 $\frac{1796}{3888}$; esto multiplícalo por 11 y divide por 14 y resulta 7 $\frac{23600}{54432}$. Tal es la cuadratura de dicho tonel. Este procedimiento se puede emplear cuando todas las medidas son equidistantes una de otra; pero cuando no fueran equidistantes tienes esta otra forma. Supongamos que los fondos tengan, cada uno, 8 de diámetro, y que la parte cacuminal dé 10, y que el primer fondo tenga el diámetro *af*, y que el diámetro del fondo trasero sea *e* y que el tonel sea de largo 10, y que a una distancia de 2 desde *af* esté *bg*, igual a 9. [Luego viene] la parte cacuminal que es igual a 10, y en tercer lugar *di* igual a 9 y que está separado de *ek* en 2. Ahora multiplica primero por sí mismo la parte cacuminal *ch* que es 10 y da 100; luego multiplica por sí mismo *bg*, que es 9, y da 81; suma los dos y da 181; ahora multiplica *ch* por *bg* y da 90; agrégalo a 181 y da 271; esto divídelo por 3 y resulta 90 $\frac{1}{3}$; multiplícalo por 11 y divide por 14 y resulta 70 $\frac{1}{42}$; esto multiplícalo por 6 que es lo que va de *bg* a *di* y da 428 $\frac{31}{42}$. Resérvatelo. Tú has multiplicado [por sí mismo] *bg* que es 9, lo que da 81; ahora multiplica por sí mismo el fondo *af* que es 8, y da 64; suma y da 145; luego multiplica 8 y por 9 y da 72; suma y da 217; divide, luego, por 3 y resulta 72 $^{a}/3$; esto multiplícalo por 11 y divide por 14 y resulta 56 $\frac{35}{42}$; esto multiplícalo por 4, pues de la línea *af* a la línea *bg* da 2 y de la línea *di* a la línea da 2, de manera que tenemos 4; entonces 4 por 56 $\frac{35}{42}$ da 227 $\frac{1}{3}$; agrégalo a 428 $\frac{31}{42}$, que te reservaste, y da 656 $\frac{1}{14}$. Tal es la cuadratura de dicho tonel, es decir 656 $\frac{1}{14}$, y esto era lo propuesto.

CASO 17. *Como algunas veces puede ocurrir que haya que medir cuerpos irregulares cuya cuadratura no se pueda obtener por líneas,*

como son las estatuas de animales racionales e irracionales, de mármol o de metal, digo que para la cuadratura tales cuerpos se emplee este procedimiento. Supongamos que tú quieras saber cuál es la cuadratura desuna estatua de hombre desnudo, que sea 3 de largo y bien proporcionada. Haz un recipiente de madera o de otra cosa, largo $3 \frac{1}{4}$ y ancho $1 \frac{1}{2}$ y alto 1. Dicho recipiente debe ser a escuadra, es decir con ángulos rectos, y bien estañado tal que el agua no salga de ninguna manera. Luego colócalo en un lugar que sea bien plano y a nivel y pon adentro tanta agua hasta que llegue a una tercera parte desde el borde superior. Luego haz una marca en el recipiente, a flor de agua, y luego pon adentro la estatua que quieres medir y deja que se aquiete el agua; luego ve cuánto ha crecido y haz a flor de agua otra marca justo encima del signo anterior; luego saca afuera la estatua y mide cuánto da desde la primera marca a la segunda. Supongamos que dé $\frac{1}{4}$. Multiplica entonces la longitud del recipiente que es $3 \frac{3}{4}$ por el ancho que es $1 \frac{1}{2}$ y da $4 \frac{7}{8}$ Esto multiplícalo por $\frac{1}{4}$ que es lo que creció el agua, y da $1 \frac{7}{32}$. Tal es la cuadratura de dicha estatua. Éste es el procedimiento que emplearás para medir dicho cuerpo.

CASO 18. *Dado un triángulo* abe *cuya base* bc *es 14, sobre la cual descansa un círculo cuyo diámetro es 8, siendo* e *el punto de contacto, separado de* b *en 6, se pregunta por los otros dos lados del triángulo, es decir* ab *y* ac, *que tocan dicho círculo*: ab *en el punto* f *y* ac *en el punto* g. Tú tienes el triángulo *abc* en el cual está descrito el círculo *efg* siendo *d* el centro y siendo 8 su diámetro, dicho círculo descansa en la base *bc* en el punto *e* y *be* es igual a 6. Desde el centro *d* tira *db, dc, de, df* y *dg*. Tienes por la penúltima del primero de EUCLIDES que la potencia de *bd* es igual a la de *be* más la de *ed* y sabes que *be* es 6, cuya potencia es 36, y que *de* es medio diametro, que es 4, cuya potencia es 16. Esto, sumado a 36, da 52 y la raíz de 52 es *bd*. Tienes dos triángulos *bde* y *bdf* que son semejantes e iguales; en ellos se

traza la línea *ef*, que corta la línea *bc* en el punto *h*; la cortará ortogonalmente. Y *fh* será cateto del triángulo *bdf y eh* será cateto del triángulo *bdc*. Ahora bien, queremos hallar la cantidad de estos catetos así: tú tienes *bd* que es raíz de 52 y *fd* raíz de 16; multiplica cada una por sí misma y súmalas: dan 68. De esto resta la potencia de que es 36, y queda 32; eleva esto al cuadrado y da 1024; divide por el doble de la base *bd* que es raíz de 52; reduplica esta raíz y da 208; divide por esto 1024 y resulta 4 $^{12}/_{13}$; réstalo de la potencia de *fd* que es 16 y queda 11 $^{1}/_{13}$. La raíz de 11 $^{1}/_{13}$ es *fh*; esto multiplícalo por 2 al cuadrado y da 44 $^{4}/_{13}$ y la raíz de 44 $^{4}/_{13}$ es *fe*. Ahora tenemos el triángulo cuyo cateto *fi* queremos; tú tienes el lado *fe* que es raíz de 44 $^{4}/_{13}$ y que *be* y *bf* son iguales. Resta uno de otro y queda nada. Entonces divide 44 $^{4}/_{13}$ por el doble de *be*, que será 12 y resulta 3 $^{9}/_{13}$; réstalo de 6, y queda 2 $^{4}/_{13}$; multiplícalo por sí mismo y da 5 $^{5}/_{69}$; réstalo de la potencia de *bf* que es 36 y queda 30 $^{114}/_{169}$; la raíz de 30 $^{114}/_{169}$ es el cateto de *fi*. Ahora queremos hallar el cateto que cae desde *g* sobre la base *bc*. Tú has trazado *dc*, la cual [, elevada al cuadrado, por la penúltima del primero de EUCLIDES es igual a la potencia de *ec* más la de *ed*. Tú sabes que *ec* igual a 8 y que su potencia es 64 y que *de*, como dijimos, es igual a 4, y su potencia a 16, que sumada a 64 da 80. La raíz de 80 es *dc*. Ahora bien, tú tienes][132] dos triángulos, *cde* y *cdg* semejantes e iguales; traza *ge* que dividirá *dc* en el punto en ángulo recto, y será *gk* cateto del triángulo cdg_t y *ek*, del triángulo *cde*. Tú tienes *ce*, que es igual a 8, siendo su potencia 64 y la de *de* 16; suma ambas y dan 80, que es la potencia de *dc*. Haz como arriba; junta la potencia de *dg*, que es 16, con la potencia de *dc*, que es 80, y da 96; resta la potencia de *cg* que es 64 y queda 32; eleva al cuadrado y da 1024; divide por el doble de *cd* que es 320 y resulta 3 $^{1}/_{5}$, es decir *dk* réstalo de 16, que es la potencia de *dg*, y queda 12 $^{4}/_{5}$. La raíz de 12 $^{4}/_{5}$, es *g* duplica

esta raíz y da [raíz de] 51 $\frac{1}{5}$. Tal es *eg*. Tú tienes el triángulo *ceg* y quieres el cateto que cae desde *g* sobre *ec* que es 8. También *cg* es 8; resta 8 de 8 y queda nada. Tú tienes *eg* que es 51 $\frac{1}{5}$; divide por el doble de *ec* que es 16 y resulta 3 $\frac{1}{5}$; multiplícalo por sí mismo y da 10 $\frac{6}{25}$; réstalo de 51 $\frac{1}{5}$ y queda 40 $\frac{24}{25}$. La raíz de 40 $\frac{24}{25}$ es el cateto *gl* del triángulo *e g c*; y [*fi*] es raíz de 30 $\frac{114}{169}$, que es 5 $\frac{7}{13}$. Entonces, si *fi* que es 5 $\frac{7}{13}$ da *b* que es 2 $\frac{4}{13}$ ¿qué dará *gl* que es 6 $\frac{2}{5}$? Multiplica 2 $\frac{4}{13}$ por 6 $\frac{2}{5}$ y da $\frac{960}{65}$; divide por *fi* que es $\frac{360}{65}$ y resulta 2 $\frac{2}{3}$; une con *cl* que es 4 $\frac{4}{5}$, y da 7 $\frac{7}{15}$. Ahora di: "si 7 $\frac{7}{15}$ da 6 $\frac{2}{5}$ ¿qué dará *bc* que es 14?". Multiplica 14 por 6 $\frac{2}{5}$ y da 89 $\frac{3}{5}$; divide por 7 $\frac{7}{15}$ y resulta 12 que es el cateto del triángulo. Ahora bien, di: "si *gl* que es 6 $\frac{2}{5}$ da que es 8, ¿qué dará 12?". Te dará *ac*, que es 15; y si *fi* que es 5 $\frac{7}{13}$, da 6 que es ¿qué dará 12? Dará *ab*, que es 13. Di entonces que el lado *ab* es 13 y el lado *ac* es 15. Y esto era lo que pedíamos.

FINIS

Venetiis impressum per probum virum Paganinum de Paganinis de
Brixia, decreto tamen publico ut nullus ibidem totique dominio
annorum XV curriculo imprimât vel imprimere faciat et alibi
impressum sub quovis colore in publicum ducat, sub
poenis in dicto privilegio contentis, anno Redemp-
tionis nostrae MDVIIII, Kalendas Iunias,
Leonardo Lauretano Venetam
Rempublicam gubernante,
pontificatus Julii
II anno VI.

ALFABETO

EL ALFABETO DE PACIOLI. El famoso humanista, grabador, impresor y librero, GEOFROY TORY, en su célebre obra titulada *Champ-Fleury ou l'art et science de la deue et vraye proportion des lettres*[133] y, antes, algunos contemporáneos han acusado a LUCA PACIOLI de haber robado su alfabeto a LEONARDO, rumor que recoge GIORGIO VASARI y pasa a otros autores más recientes. La crítica moderna no solamente rechaza esta sospecha sino que demuestra que PACIOLI no tomó nada de LEONARDO y que, por el contrario, TORY se inspiró con toda seguridad en el libro que ahora publicamos, que debe haber conocido cuando su segundo viaje a Italia, después de la batalla de Marignan en 1515. También existen sospechas de que TORY algo plagió de DURERO, cuyo alfabeto publicado en el *Underweysung der Messung* (1525) es muy parecido, y tres años anterior a Tory.

Es imposible admitir que si LEONARDO hubiera construido y dibujado las letras para PACIOLI, éste, que admiraba sin límites a su amigo (y no ha desperdiciado ocasión de decirlo, como se comprueba en la primera parte del presente volumen y en todas sus obras), no lo hubiera reconocido aún en las pocas ocasiones que habla de las letras en los capítulos VI, XI y XIX de la segunda parte.

La verdad es que estaba en el espíritu cultural de la época buscar reglas y principios para la construcción de las letras que italianos, o extranjeros que viajaban por Italia, tenían delante de sus ojos cuando comenzaron a estudiar los monumentos romanos, su arquitectura y su geometría. PACIOLI al terminar el manuscrito de su obra en 1497, no copió el único alfabeto conocido de DAMIANUS MOYLLUS, publicado en Parma en 1480, ni pudo copiar el manuscrito original del famoso calígrafo FELICE FELICIANO DA VERONA, fechado en 1481 y existente en la Biblioteca del Vaticano, o el que construyera otro célebre humanista HARTMANN SCHEDEL, cuyo original de 1482,

conservado hoy en la Biblioteca de Munich, tampoco se imprimió.

Todos ellos trabajaban o creaban contemporáneamente, se basaron en el círculo y el cuadrado, discutiendo mucho acerca de la proporción entre el espesor de la letra y su altura. MOYLLUS quiso fijarla en la doceava parte, FELICIANO en la décima y PACIOLI en la novena, medida que después rechaza TORY, para adoptar el criterio de FELICIANO.

Es de lamentar que PACIOLI haya dejado pocas explicaciones de su decidida preocupación por la estética y proporciones de las letras, que en cualquier caso son mucho más completas y comprensivas que las de sus predecesores. Él es el primero que habla a sus alumnos del *alphabeto dignissimo antico*; es el primero que busca proporciones y comparaciones con el cuerpo humano y quiere utilizar únicamente la regla y el compás para enseñar a sus alumnos la reconstrucción de las inscripciones, algunas de ellas hasta de bronce, que les mostraba en los edificios antiguos. Lo que no se puede dudar es que PACIOLI aplica todo el pensamiento que preside la primera parte de su texto a la división del cuadrado en media y extrema razón, y en nueve partes, lo cual es la expresión en números enteros de números irracionales. Esto resulta visible en todos sus cálculos y en todas las letras de su alfabeto.

El conocido calígrafo y artista gráfico inglés STANLEY MORISON ha publicado un interesantísimo libro titulado: *Fra Luca de Pacioli, of Borgo San Sepolcro* (New York, The Grolier Club, 1933), en donde estudia muchos detalles de la obra de PACIOLI, quien habría sido, por ejemplo, uno de los primeros en acortar el brazo superior de la letra E, que en *scriptura monumentalis* está tallado con brazos de igual largo. Sin embargo, PACIOLI conservó la S, P, B y otras letras de un ancho menor que las demás, las cuales continuaron construyéndose

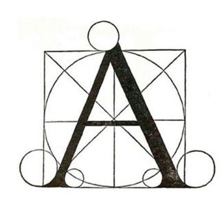
dentro del cuadrado. PACIOLI fue, entonces, clásico y no se habría animado a ensanchar la S hasta el cuadrado, como se hizo después cuando aparece el estilo "lombardo", porque eso habría sido considerado una "barbaridad" para los clásicos.

Después de PACIOLI aparecieron varios como ser SIGISMONDO DEI FANTI (1514), TORNIELLO (1517), ARRIGHI (1520), VICENTINO (1522), TAGLIENTE (1523), VERINI (1526) y PALATINO (1545), para no citar más que los principales. A esta floración de calígrafos y grabadores, en su mayoría romanos, hay que atribuir principalmente el empleo del término "lettere romane" en lugar de los vocablos "lettere antiche" o "antiqua", usados por Pacioli y sus coetáneos.

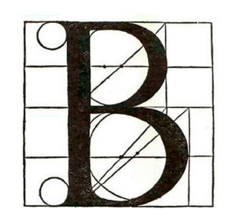
El lector notará que el alfabeto que sigue muestra dos letras O, construidas según reglas geométricas diferentes, y que falta la letra Z, circunstancia curiosa que ya notó TORY, provocando en él una expresión despectiva: *je ne men soucye*.

Es de esperar que la publicación del alfabeto de PACIOLI sea un acontecimiento de tanta importancia en la Argentina de hoy como lo fue en el despertar del arte del Renacimiento, y que contribuirá al progreso de grabadores y de las artes gráficas de nuestro país.

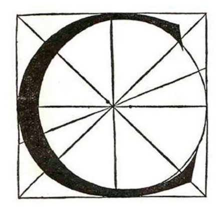
T. B



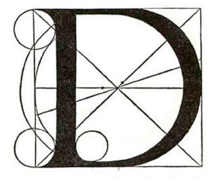
Esta letra A se obtiene del círculo y de su cuadrado. El brazo de la derecha debe ser grueso [como] una novena parte de la altura. El brazo izquierdo debe ser la mitad del brazo grueso. El brazo del medio debe ser la tercera parte del brazo grueso. Ancho de dicha letra: cada brazo, [derecho e izquierdo, debe pasar] por el cruce [correspondiente]. El [brazo] del medio [debe estar] algo más bajo [que el cruce central], como se ve aquí en los diámetros marcados.



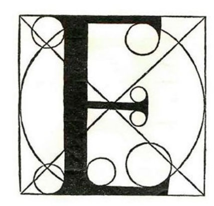
Esta letra B se compone de dos círculos, y el de abajo es mayor en una novena parte, es decir, debe ser cinco novenos de la altura, según se muestra proporcionadamente, a la vista, [en la figura de] arriba



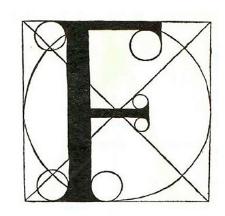
Esta letra C se obtiene del círculo y de su cuadrado, engrosándola una cuarta parte hacia afuera y también hacia adentro. El extremo de arriba termina sobre el cruce del diámetro con la circunferencia. El de abajo pasando el cruce en medio noveno, junto al lado del cuadrado, como se ve en la figura y se obtiene como una O.



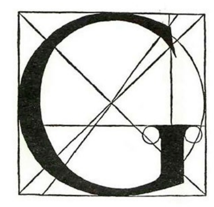
Esta letra D se obtiene del círculo y del cuadrado. El brazo derecho debe estar por dentro de los cruces y [debe ser] grueso de nueve partes [de su altura], una. El cuerpo debe engrosarse al igual que en las demás letras redondas. La unión, [es decir, el brazo] de arriba debe ser gruesa un tercio del brazo grueso y la de abajo un cuarto o un tercio.



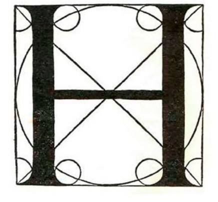
Esta letra E se obtiene del círculo y de su cuadrado. El brazo grueso debe ser [como] una novena parte. El brazo de arriba debe ser la mitad del brazo grueso, y el de abajo lo mismo. El del medio, la tercera parte del brazo grueso, como el del medio de la A; y dicha letra debe ser ancha [como] la mitad del cuadrado *et sic erit perfectissima*.



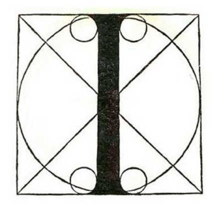
Esta letra F se forma de la misma manera que la letra E, ni más ni menos —salvo que la F va sin el tercer brazo—, tal como se ha dicho ampliamente, en su lugar, con respecto a dicha E, y con todas sus proporciones. Por eso baste esto al respecto



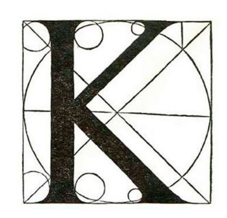
Esta letra G se forma, como la C, de su círculo y del cuadrado. El brazo derecho de abajo debe ser alto como un tercio de su cuadrado y grueso como una novena parte de la altura de su cuadrado.



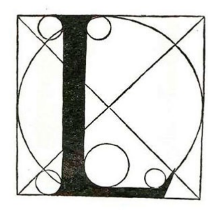
Esta letra H se obtiene del círculo y de su cuadrado. Sus brazos gruesos se hacen a través de los cruces, es decir, donde se intersecan los diámetros del círculo y de su cuadrado. El grosor de dichos brazos debe ser [como] una novena parte de la altura. El brazo del medio se hace en la mitad del diámetro; su grosor debe ser [como] la tercera parte del brazo grueso, como el travesaño de la A.



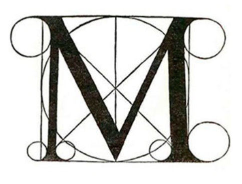
Esta letra I se obtiene del círculo y del cuadrado. Su grosor debe ser [como] una novena parte. Su construcción, al lado de las demás, es fácil.



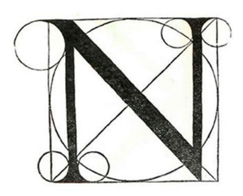
Esta letra K se obtiene del círculo y de su cuadrado, tirando una línea como diámetro del cuadrado. En esta línea se afirman y terminan los dos brazos, a la mitad del brazo grueso. El brazo de abajo debe ser grueso como los demás brazos, es decir, una novena parte. El de arriba [debe ser grueso como] la mitad del brazo grueso como el izquierdo de la A. El de abajo debe ser largo hasta el cruce, mejor dicho, pasándolo. El de arriba por dentro del cruce.



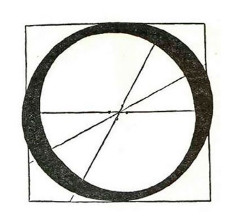
Esta letra L se obtiene del círculo y de su cuadrado. Su grosor debe ser una novena parte de la altura. Su ancho, medio cuadrado, más las partes redondas marcadas arriba. El brazo delgado de abajo debe ser la mitad del brazo grueso, como el de la E y de la F.



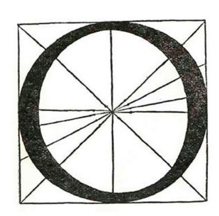
Esta letra M se obtiene del círculo y de su cuadrado. Los brazos delgados deben ser la mitad de los gruesos, como el izquierdo de la A; los brazos extremos deben estar un poco dentro del cuadro, los brazos medios entre aquéllos y las intersecciones de los diámetros. Sus grosores, los gruesos y los delgados, se refieren a los de la A, como puedes ver claramente arriba, en la figura.



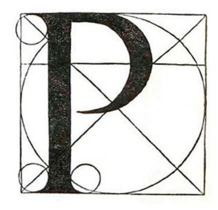
Esta letra N se obtiene de su círculo *et etiam* del cuadrado. El primer brazo debe estar fuera de la intersección de los diámetros. El transversal del medio debe ser grueso [como] una novena parte [de la altura] y tomado *diametraliter*. El tercer brazo debe estar fuera del cruce. El primer brazo y el último deben ser gruesos [como] la mitad dei brazo grueso, es decir, de una cabeza.



Esta O es perfectísima. [Sostiene STANLEY MORISON (*Fra Luca de Pacioli of Borgo*. New York, 1933) que debe de haberse trocado, por error, esta O con la otra, pues el texto alude a "panzas" inclinadas, la una hacia abajo y la otra hacia arriba. Disiento por esto: 1.º, tal característica se verifica también en la segunda O; 2.º, en el primer esquema no figura la división en *cruz*; 3.º, para la Q se emplea la segunda O, cuyo esquema geométrico figura —además — en la C, luego PACIOLI alude a la otra cuando dice: "antes he puesto otra *a mi gusto* (*a mio piacere*) perfectísima". — *N. d. t.*].

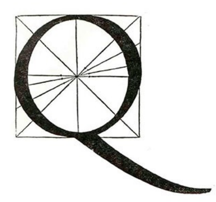


Esta letra O se obtiene del círculo y de su cuadrado. Se divide en cuatro partes, es decir, en cruz, por medio de las cuatro líneas. Su cuerpo debe ser grueso [como] una novena parte [de la altura]. El cuerpo de arriba debe ser grueso [como] la mitad de su grosor. Una de sus panzas, debe inclinarse hacia abajo, la otra hacia arriba. La parte delgada del cuerpo debe ser la tercera parte de su panza. Como

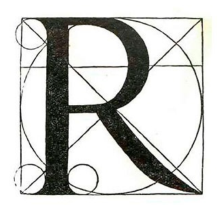


Esta letra P se obtiene del círculo y de su cuadrado. El brazo grueso debe ser [como] una novena parte [de la altura]. La forma de la curvatura debe ser grande como la de abajo de la B; y el grosor de la panza debe ser tanto cuanto el brazo grueso; y hay que empezar dicha letra desde los cruces del círculo grande, es decir, desde las intersecciones de los diámetros, *et sic crit perfectissima*.

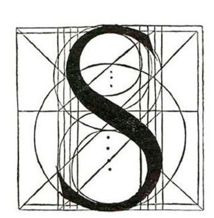
sobre dicha letra hay dos opiniones, por eso antes he puesto otra a mi gusto, perfectísima. Tú toma la que te parezca y con ellas formarás la Q, tal como entenderás luego en su lugar.



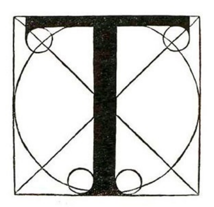
Esta letra Q, como dije antes, se obtiene de la O, terminando su brazo [de manera tal que pase a] tres cabezas debajo del cuadrado, es decir, tres novenas partes de su cuadrado o sea del diámetro de su círculo, con la proporción que se ve aquí, guiando las panzas gruesas y las delgadas justo como se dijo de la O. Su brazo debe ser largo [como] nueve cabezas, es decir, [como] su cuadrado. Y al final, la punta debe ser alta dirigida hacia arriba en un noveno de la altura, siguiendo la curvatura de la pluma y degradando su grosor.



Esta letra R se obtiene de la letra B. La parte redonda está por debajo del centro en medio brazo. Todo esta letra debe estar dentro de los cruces salvo el brazo torcido [que] debe salir fuera de las cruces hasta el final del cuadrado. Dicho brazo torcido debe ser grueso [como] una novena parte y terminar delgado, en punta, en el ángulo del cuadrado en forma de línea curva *ut hic in exemplo patet*.



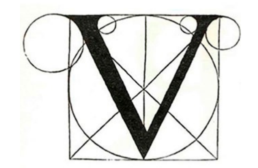
Esta letra S se obtiene de ocho círculos y éste es el procedimiento *ut his in exemplo apparet*. Por medio de paralelas, hallando sus centros encontrarás que los de abajo son mayores que los de arriba en un



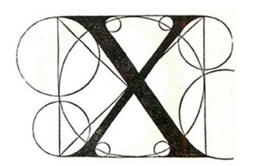
Esta letra T se obtiene de su cuadrado y del círculo. El brazo grueso debe ser justo como se dijo de la I. El transversal debe ser grueso la mitad del brazo grueso como el de arriba de la E y de la F, y debe terminar a una

tercio del noveno de su cuadrado. La panza del medio debe ser gruesa justamente [como] la novena parte de la altura. Las delgadas, [como] un tercio del grosor, y sus cabezas deben terminar con gracia.

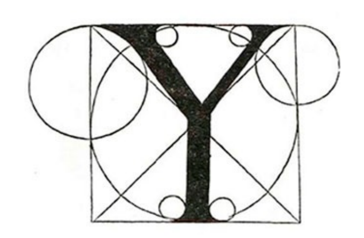
media cabeza, por lado, desde los costados de su cuadrado. Es, [así,] gratísima a la vista.



Esta letra V se obtiene de su cuadrado todo entero. El brazo izquierdo debe ser grueso [como] la novena parte de su cuadrado, y tomado *diametraliter* como el brazo derecho de la A y el transversal de la N. El brazo derecho debe ser la mitad del grueso, y tomado también *diametraliter* como el izquierdo de la A; termina en punta en la base del cuadrado, al final del diámetro del círculo.



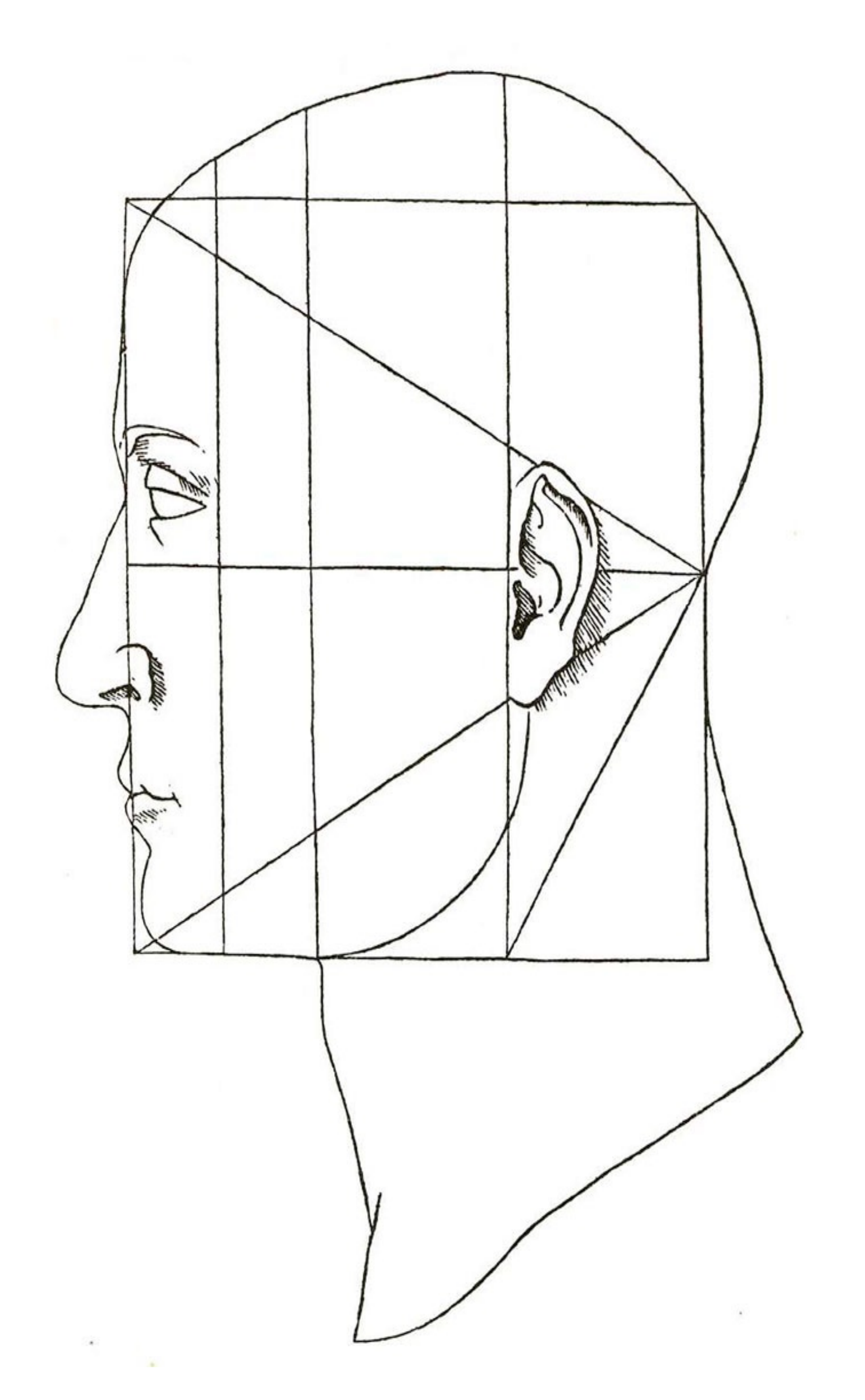
Esta letra X requiere todo su cuadrado, cruzándose sus brazos en la intersección de los diámetros. El uno debe ser grueso [como] la novena parte de la altura. El otro [como] la mitad. Deben ser tomados *diametralitcr* y sus brazos deben terminar con la debida gracia según la virtud de los círculos pequeños.

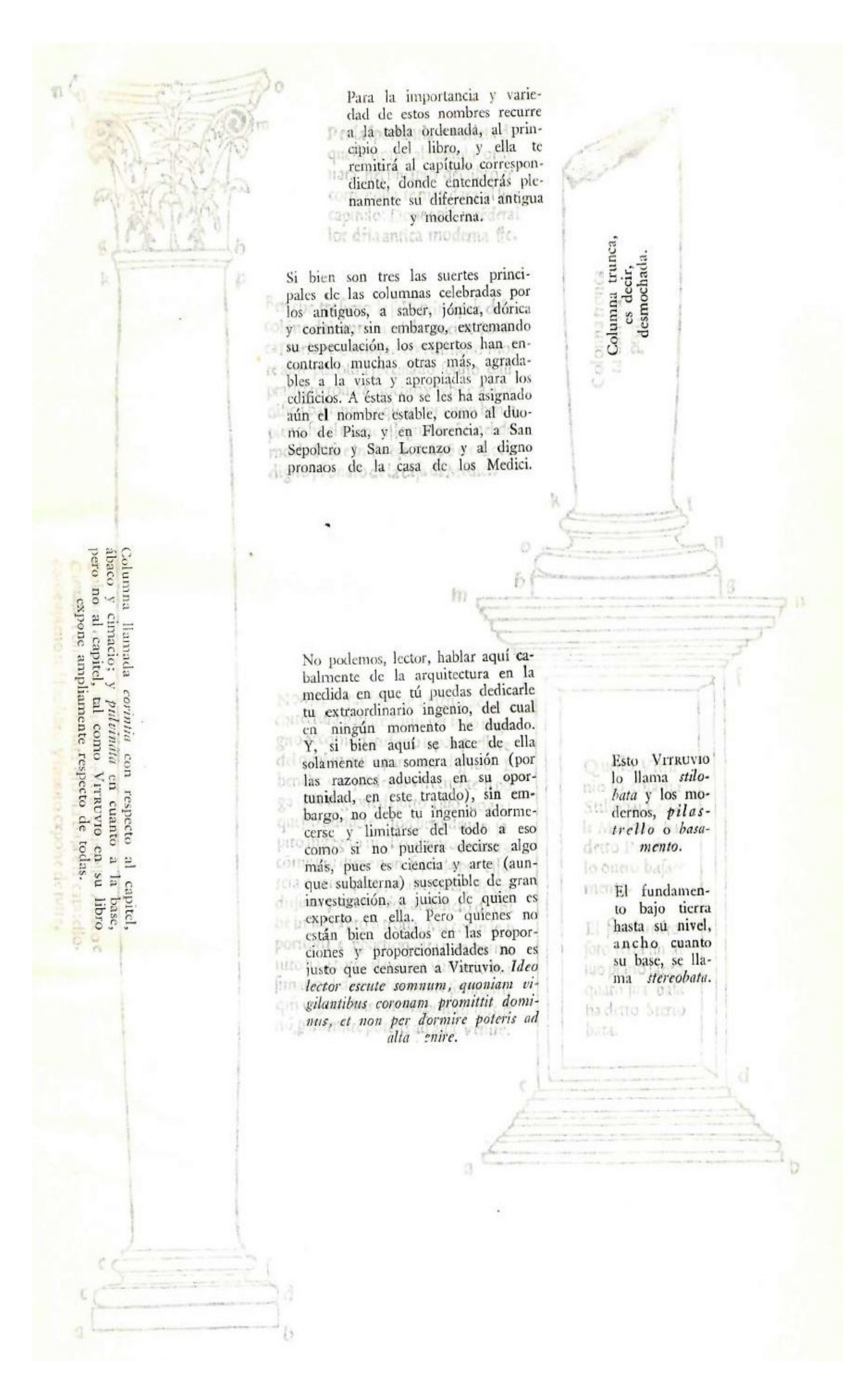


Esta letra Y requiere todo el cuadrado. Los brazos derecho e izquierdo deben ser gruesos en la proporción de los de la V, salvo que terminan en punta, sobre la intersección de los diámetros y de allí hacia abajo se traza la unión a la base del cuadrado, gruesa

[como] un noveno del cuadrado. Las cabezas superiores terminan arriba. Las hago redondas, como puedes ver.

ARQUITECTURA





Para la importancia y variedad de estos nombres recurre a la tabla ordenada, al principio del libro, y ella te remitirá al capítulo correspondiente, donde entenderás plenamente su diferencia antigua y moderna.

Si bien son tres las suertes principales de las columnas celebradas por los antiguos, a saber, jónica, dórica y corintia, sin embargo, extremando su especulación, los expertos han encontrado muchas otras más, agradables a la vista y apropiadas para los edificios. A éstas no se les ha asignado aún el nombre estable, como al duomo de Pisa, y en Florencia, a San Sepolcro y San Lorenzo y al digno pronaos de la casa de los Medici.

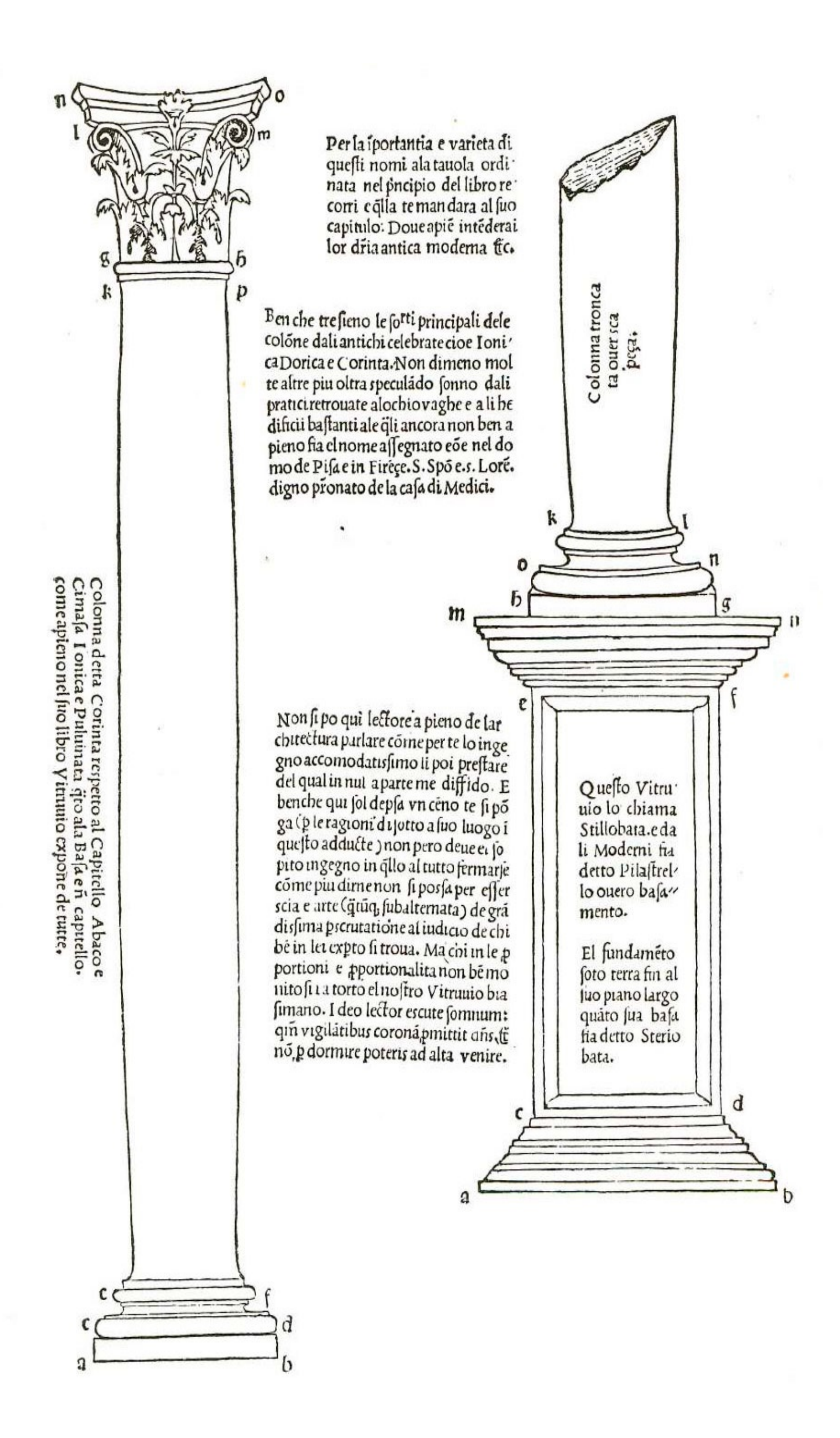
Columna trunca, es decir, desmochada.

Columna llamada *corintia* con respecto al capitel, ábaco y cimacio; y *pulvinata* en cuanto a la base, pero no al capitel, tal como Vitruvio en su libro expone ampliamente respecto de todas.

No podemos, lector, hablar aquí cabalmente de la arquitectura en la medida en que tú puedas dedicarle tu extraordinario ingenio, del cual en ningún momento he dudado. Y, si bien aquí se hace de ella solamente una somera alusión (por las razones aducidas en su oportunidad, en este tratado), sin embargo, no debe tu ingenio adormecerse y limitarse del todo a eso como si no pudiera decirse algo más, pues es ciencia y arte (aunque subalterna) susceptible de gran investigación, a juicio de quien es experto en ella. Pero quienes no están bien dotados en las proporciones y proporcionalidades no es justo que censuren a Vitruvio. *Ideo lector escute somnum, quoniam vigilantibus coronam promittit dominus, et non per dormire poteris ad alta enire.*

Esto Vitruvio lo llama *stilobata* y los modernos, *pilastrello* o *basamento*.

El fundamento bajo tierra hasta su nivel, ancho cuanto su base, se llama *stereobata*.



Per la ĩportantia e varieta di questi nomi ala tauola ordinata nel pncipio del libro recorri e q̃lla te mandara al suo capitulo: Doue apiẽ intẽderai lor dr̃ia antica moderna ⁊c.

Ben che tre sieno le sorti principali dele colõne dali antichi celebrate cioe Ionica Dorica e Corinta. Non dimeno molte altre piu oltra speculãdo sonno dali pratici retrouate alochio vaghe e a li hedificii bastanti ale q̃li ancora non ben a pieno fia el nome assegnato cõe nel domo de Pisa e in Firẽçe. S. Spõ e. s. Lorẽ. digno pr̃onato de la casa di Medici.

Non si po qui lectore a pieno de larchitectura parlare cõme per te lo ingegno accomodatissimo li poi prestare del qual in nul aparte me diffido. E benche qui sol depsa vn cẽno te si põga (p le ragioni di sotto a suo luogo i questo adducte) non pero deue ei sopito ingegno in q̃llo al tutto fermarse cõme piu dime non si possa per esser scia e arte (q̃tũq̃ subalternata) de grãdissima pscrutatione al iudicio de chi bẽ in lei expto si troua. Ma chi in le pportioni e pportionalita nõ bẽ monito si i a torto el nostro Vitruuio biasimano. Ideo lector escute somnum: q̃ñ vigilãtibus coronã pmittit añs, ⁊ nõ p dormire poteris ad alta venire.

Los antiguos llaman a esto *acroterio*. Los modernos *regolo* de la cornisa.

Los antiguos lo llaman *corona*, los modernos lo llaman *gocciolatoio*.

Los antiguos lo llaman *denticoli*, los modernos *denticelli* y *rastro*.

Esto todos lo llaman *cimacio* del friso y zoóforo.

En la siguiente figura de la puerta llamada "Speciosa" las dos partes incluídas aquí, es decir, la de la columna redonda con su capitel, base, estilóbato y estereóbato, [y la del] epistilo con su zoóforo y cornisa, estoy convencido, lector, de que el ojo de tu versado ingenio las presentará debidamente a tu intelecto, con los recuerdos que encontrarás por medio de la tabla.

De lo que aquí figura sobre la columna, el arquitrabe y la cornisa, se da nada más que una somera referencia, pues no puede hablarse de ellos brevemente, sobre todo por la gran variedad de proporciones y proporcionalidades que se requieren en sus debidas disposiciones. Todo esto lo aclara el sublime volumen de nuestro digno antiguo arquitecto VITRUVIO POLIÓN. A él te remito para todo, con el recurso amplio de aritmética, geometría y del quinto libro de nuestro perspicacísimo platónico y megarense filósofo EUCLIDES, sin cuya doctrina no es posible ejercer bien *prathice et theorice*, ninguna cosa, *cum omnia in número pondere et mensura disposuit altisimus*.

A esto los antiguos lo llaman *scotica*, los modernos *gola* del arquitrabe.

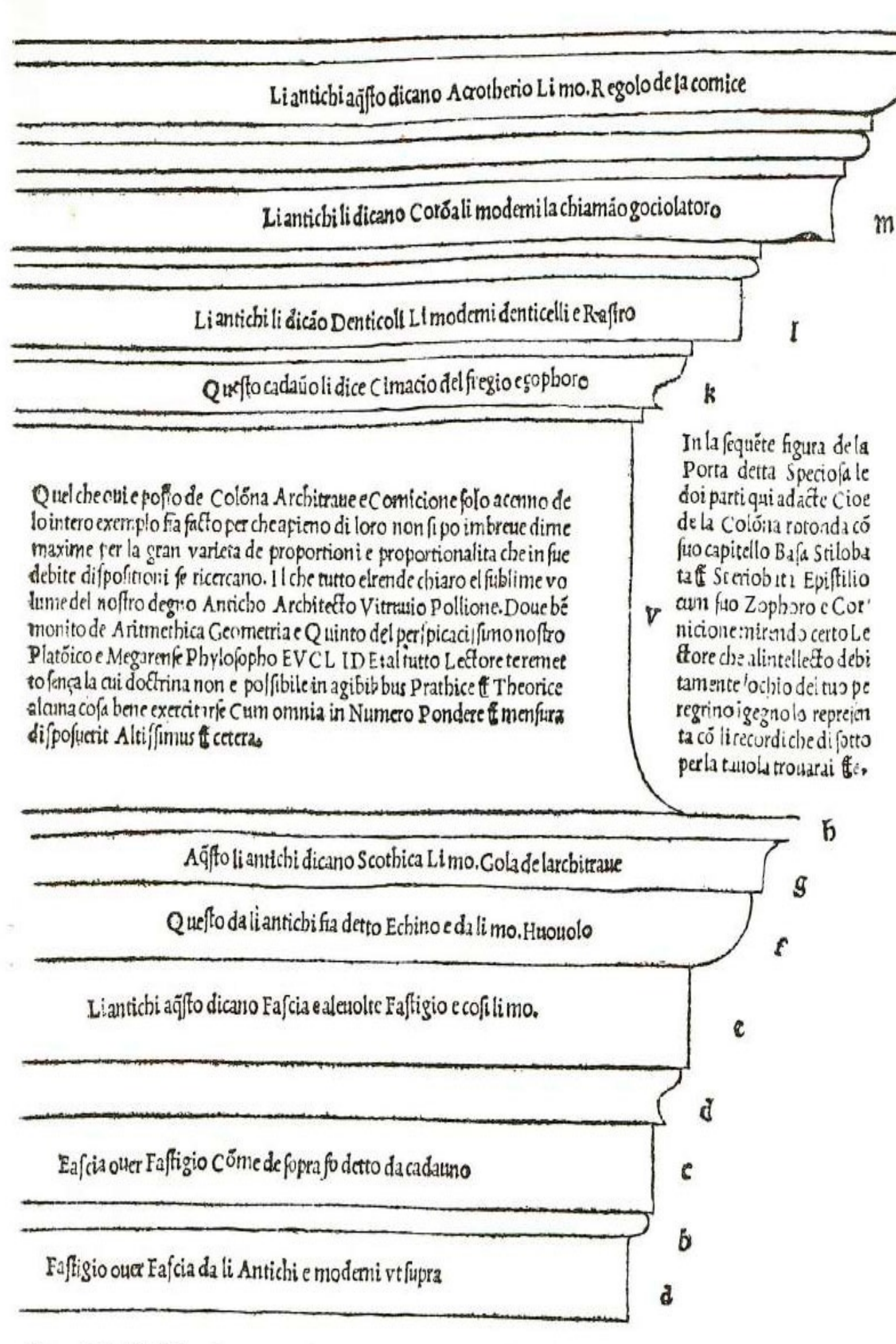
Esto los antiguos lo llaman *echino* y los modernos *ovolo*.

Los antiguos llaman esto *fascia* y a veces *fastigio*, y así los modernos.

Fascia o *fastigio*, como arriba, lo llamaron unos y otros.

Fastigio o faja, por los antiguos y modernos *ut supra*.

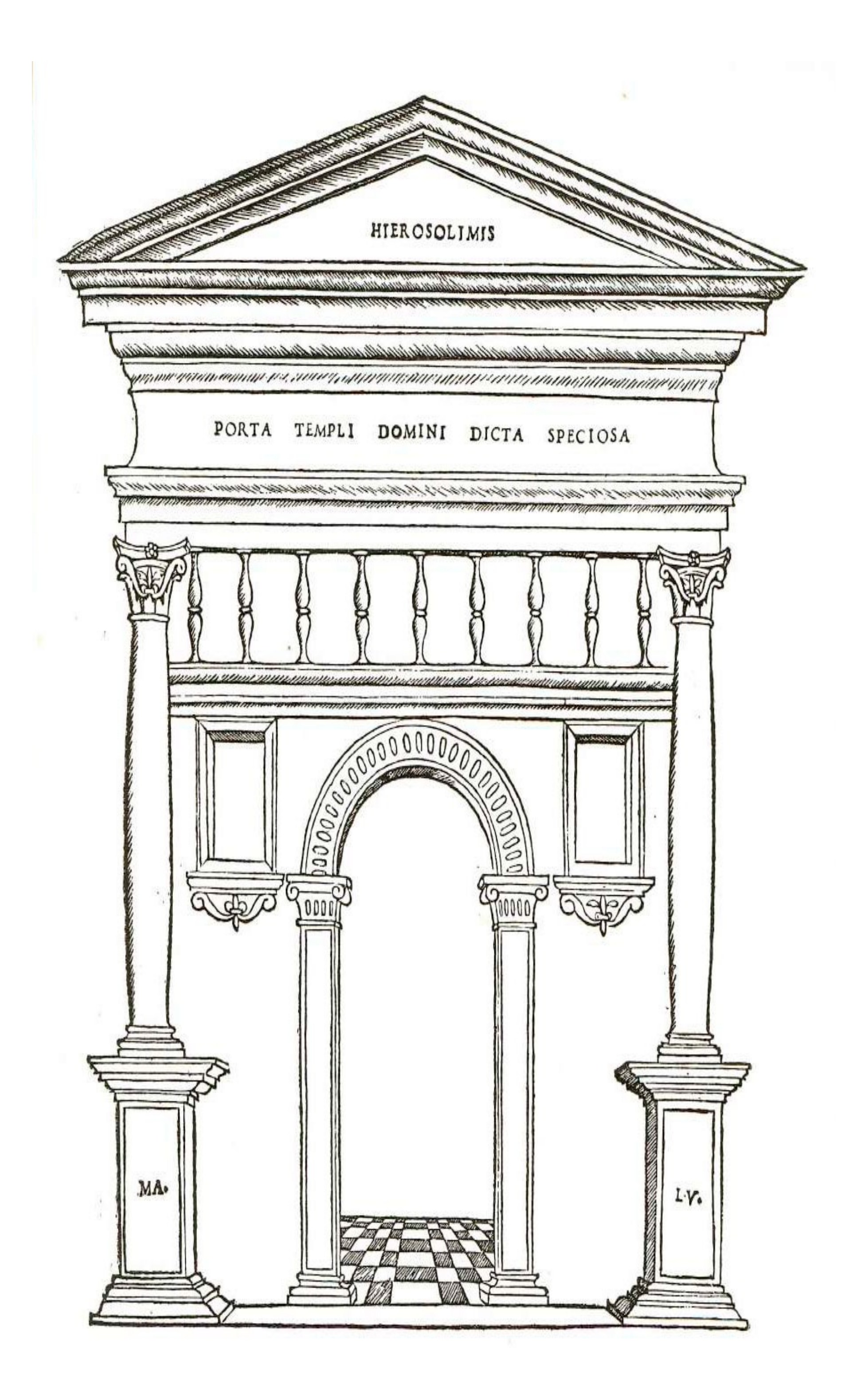
Toda la composición desde el zoóforo hacia abajo los antiguo la llaman *epistilio* y los modernos *architrave*; y la composición desde allí hacia arriba los antiguos la llaman *cornice* y los modernos *cornicione*.



Quel che qui e posto de Colõna Architraue e Cornicione solo acenno de lo intero exemplo fia facto per che apieno di loro non si po imbreue dirne maxime per la gran varieta de proportioni e proportionalita che in sue debite dispositioni se ricercano. Il che tutto el rende chiaro el sublime volume del nostro degno Anticho Architecto Vitruuio Pollione. Doue bẽ monito de Aritmethica Geometria e Quinto del perspicacissimo nostro Platõico e Megarense Phylosopho EVCLIDE tal tutto Lectore teremet to sença la cui doctrina non e possibile in agibilibus Prathice & Theorice alcuna cosa bene exercitarse Cum omnia in Numero Pondere & mensura disposuerit Altissimus & cetera.

In la sequẽte figura de la Porta detta Speciosa le doi parti qui adacte Cioe de la Colõna rotonda cõ suo capitello Basa Stilobata & Sterobati Epistilio cum suo Zophoro e Cornicione mirando certo Lectore che alintellecto debitamente lochio del tuo pelegrino igegno lo represẽta cõ li recordi che di sotto per la tauola trouarai &c.

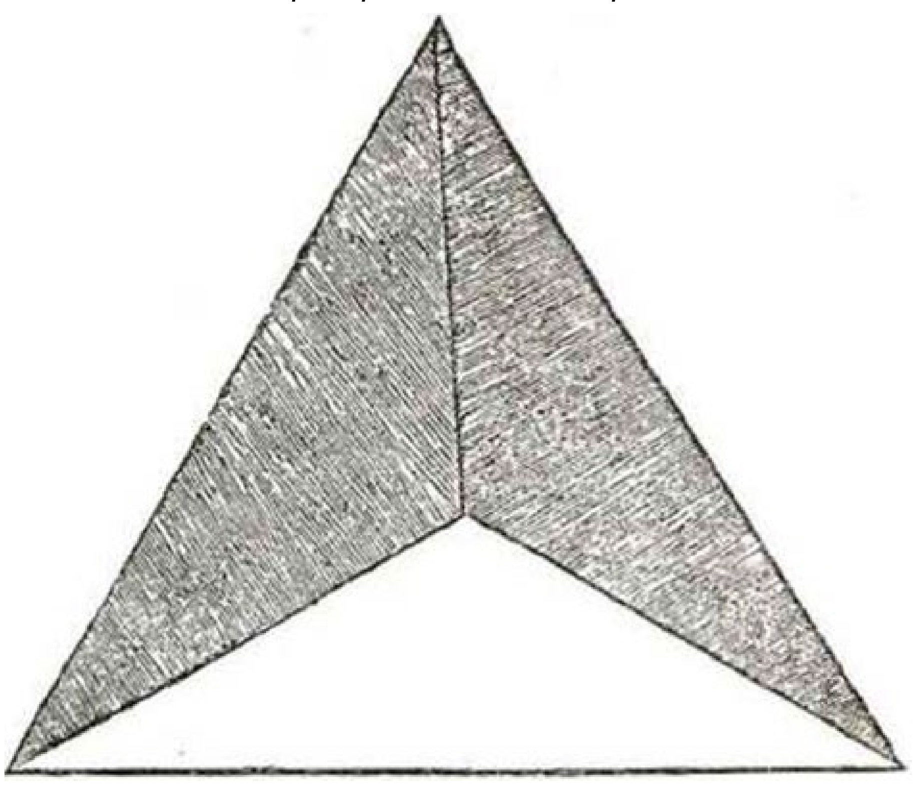
Tutto el cõposto dal Zophoro in giu da li Antichi fia detto Epistilio e da li moderni Architraue e tutto el cõposto sopra depso li. A. cornice e mo. Cornicione.


HIEROSOLIMIS
PORTA TEMPLI DOMINI DICTA SPECIOSA
MA.
L.V.

CUERPOS GEOMÉTRICOS

I

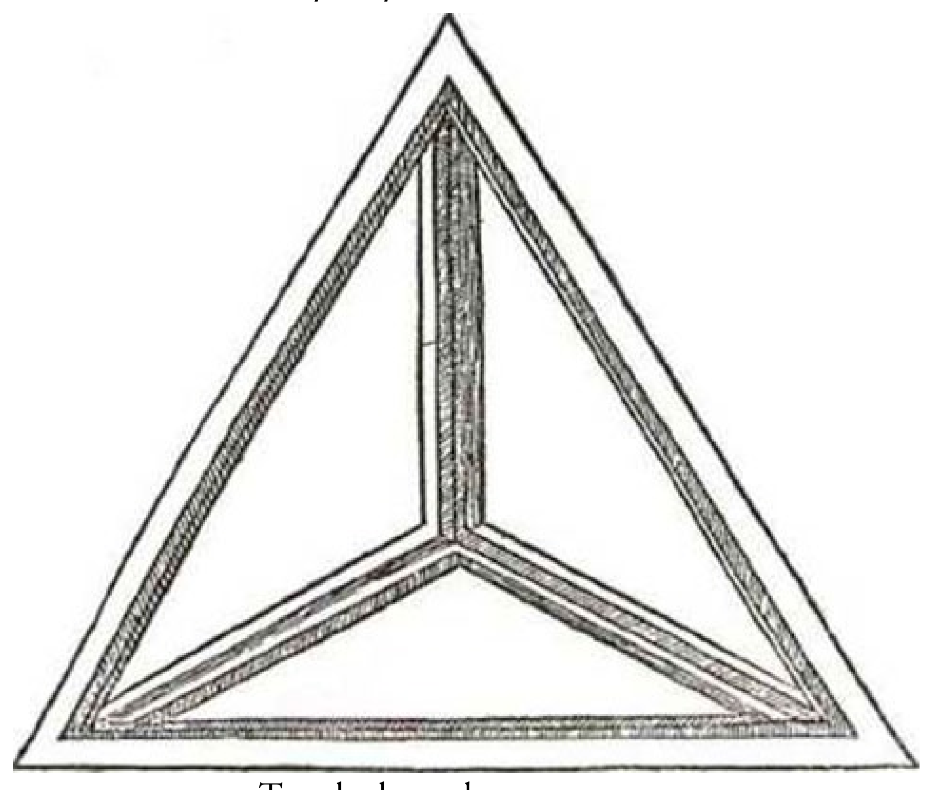
Τετρἀεδρον ἐπίπεδον στερεόν



Tetrahedron planum solidum

II

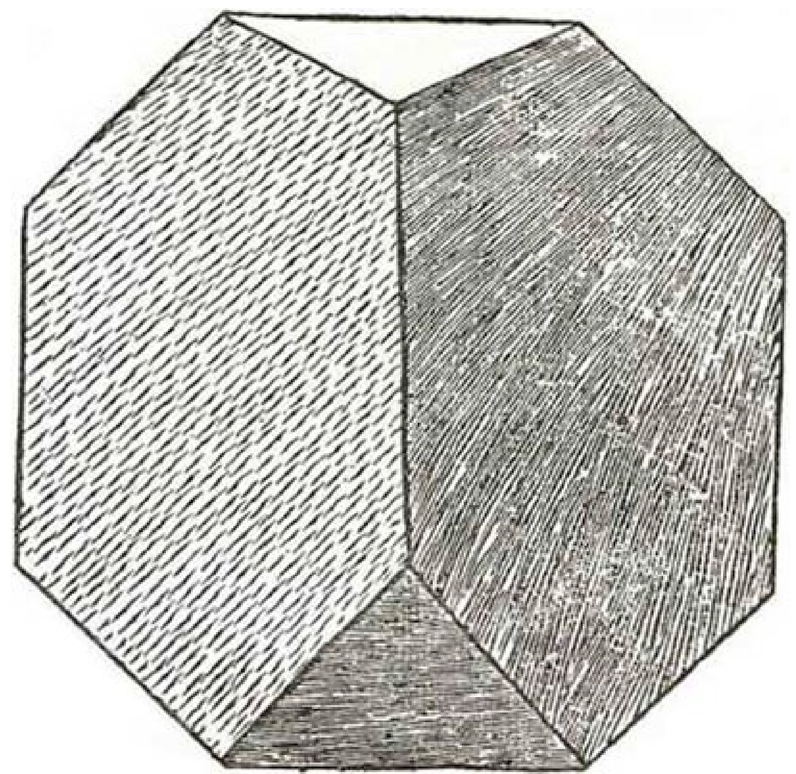
Τετράεδρον επίπεδον κένον



Tetrahedron planum vacuum

III

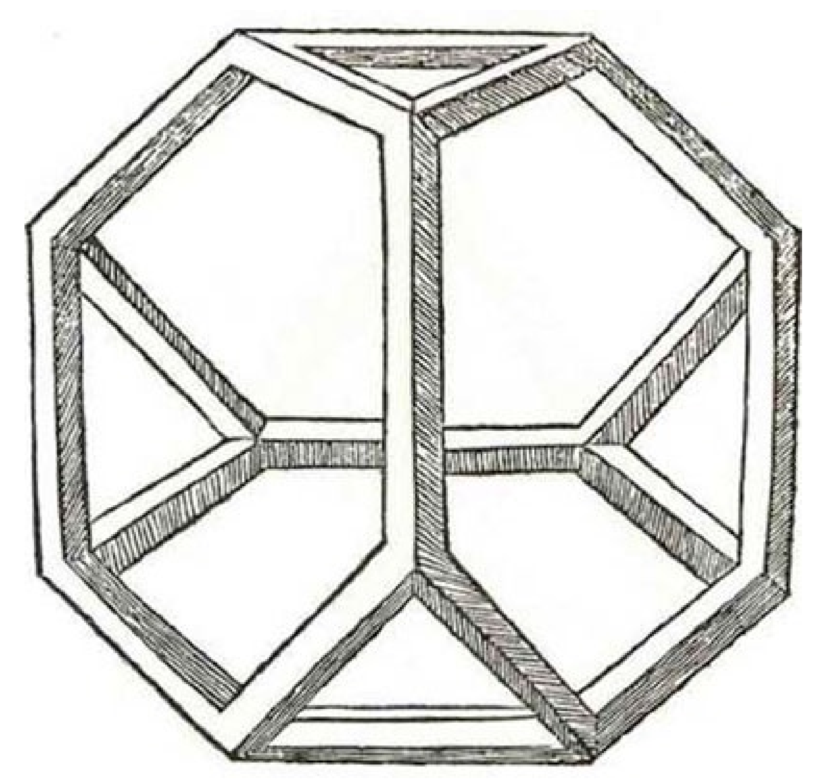
Τετράεδρον ἀποτετμημένον στερεόν



Tetrahedron abscisum solidum

IV

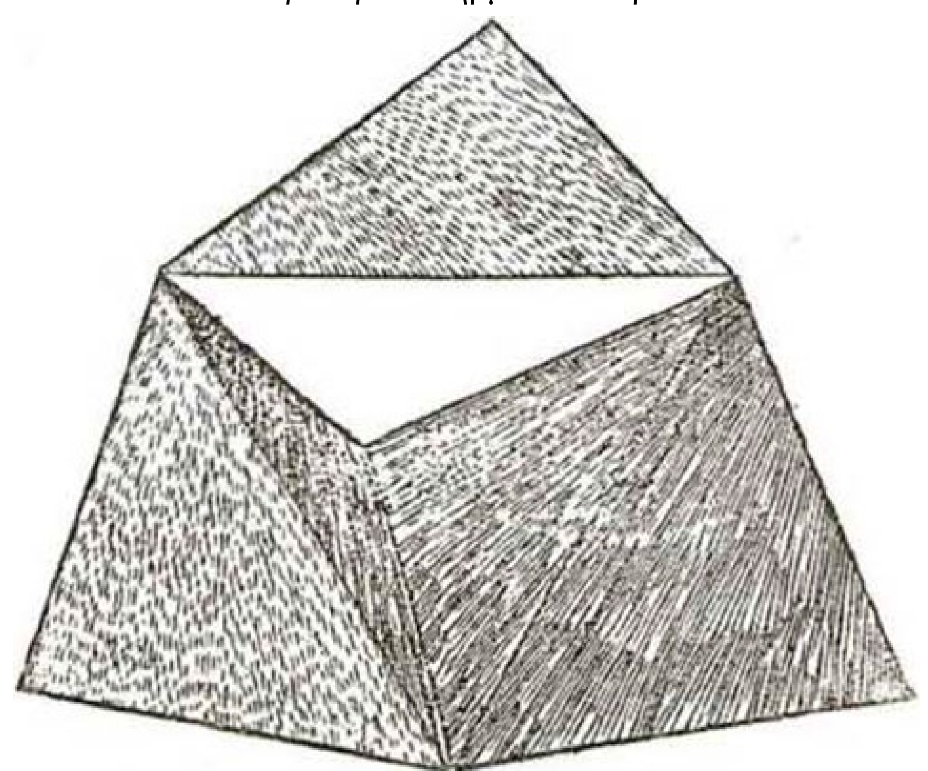
Τετράεδρον άποτετμημένον κενόν



Tetrahedron abscisum vacuum

V[134]

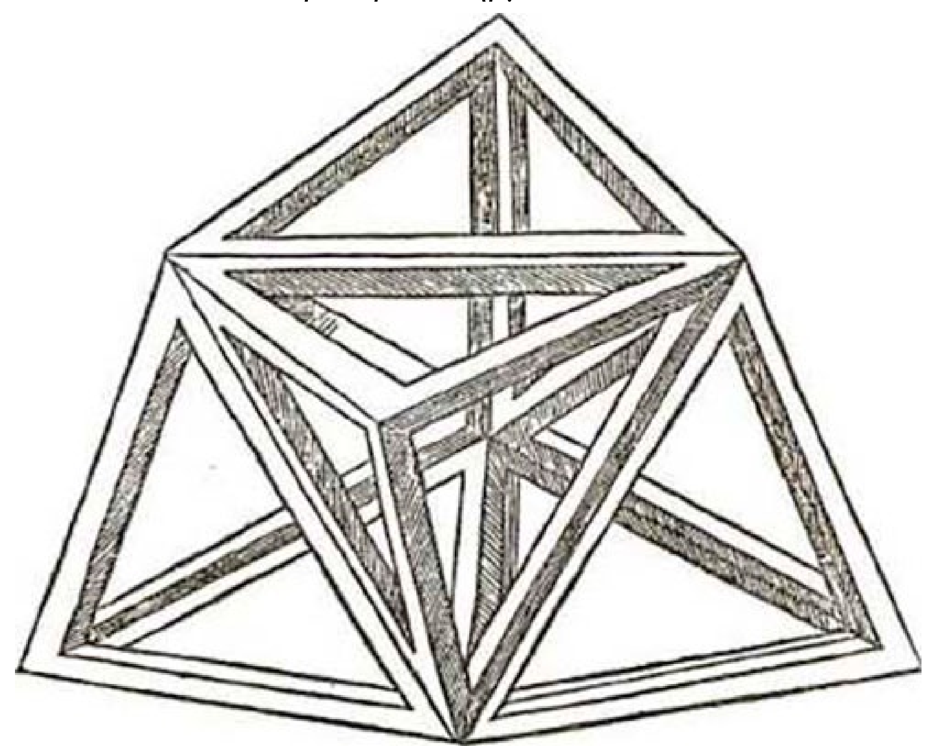
Τετράεδρον έπηρμένον στερεόν



Tetrahedron abscisum solidum

VI

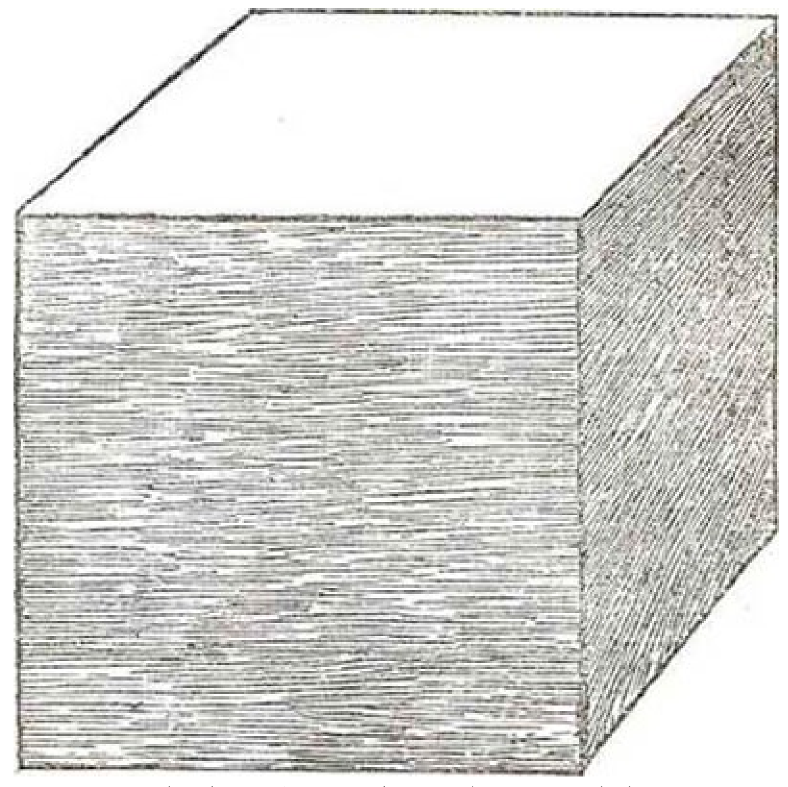
Τετράεδρον έπηρμένον κένον



Tetrahedron elevatum vacuum

VII

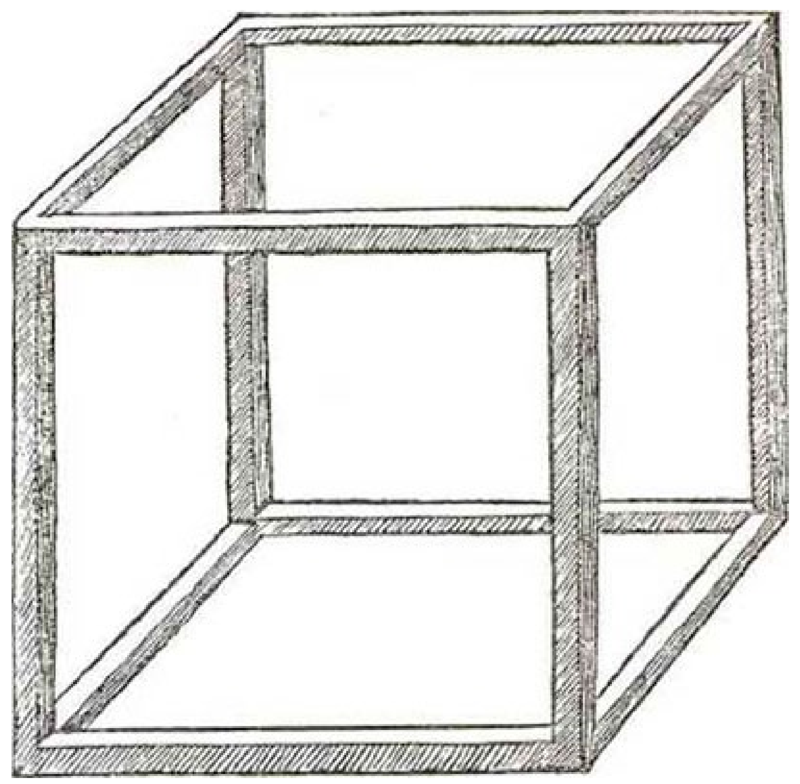
Ἑξάεδρον (ἢ κύβος) επίπεδον στερεόν



Exahedron (sive cubus) planum solidum

VIII

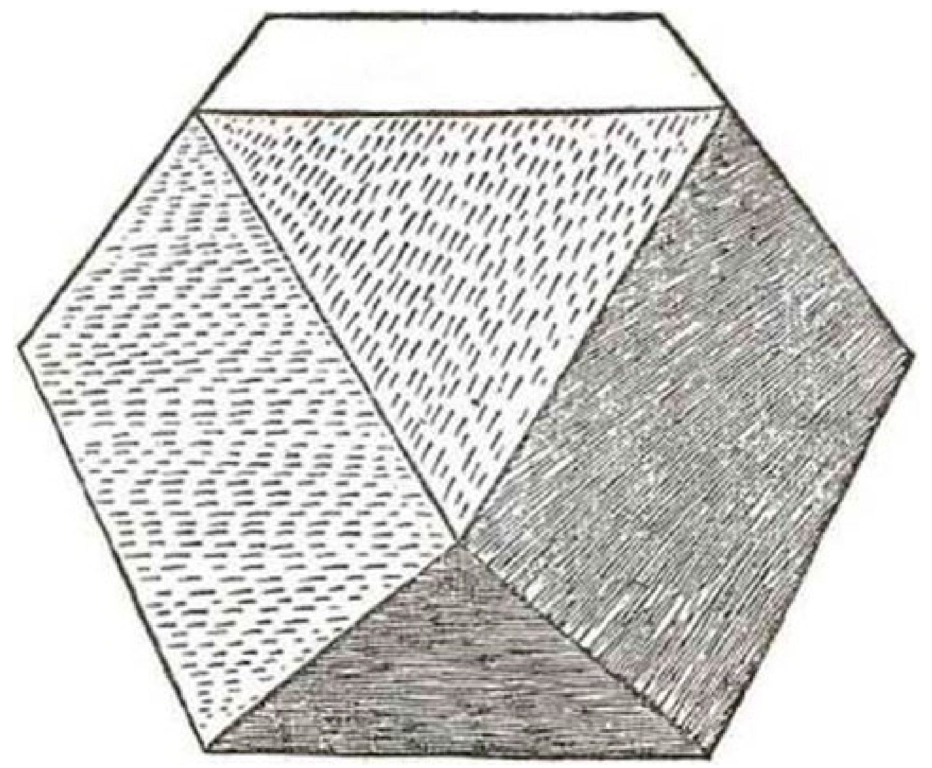
Ἑξάεδρον (ἢ κύβος) ἐπίπεδον κενόν



Exahedron planum vacuum

IX

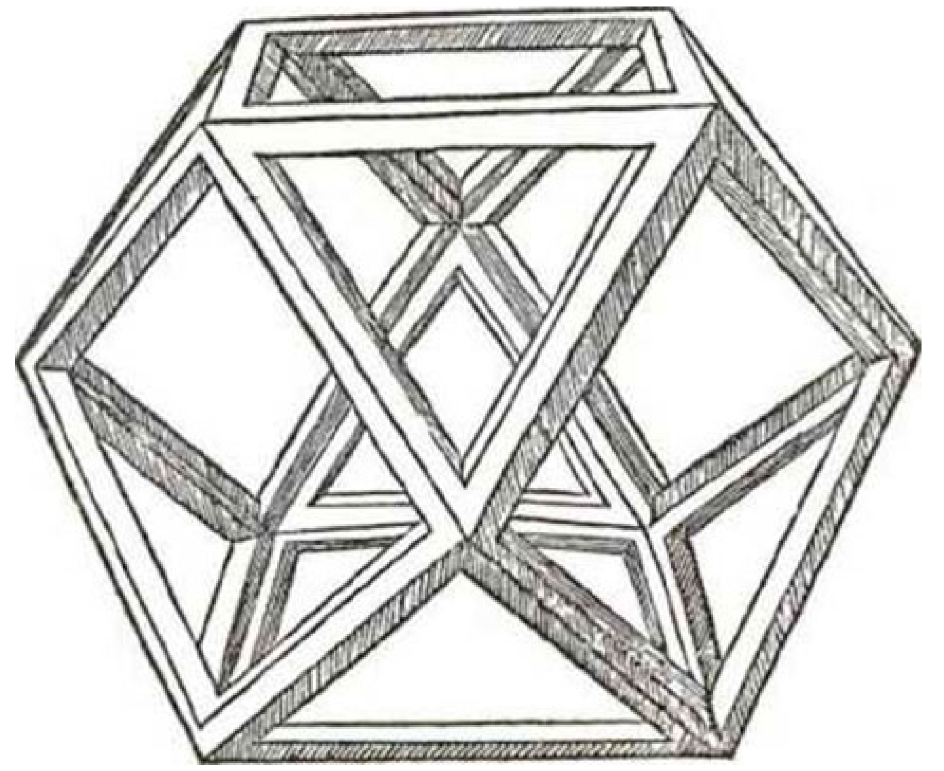
Ἑξάεδρον ἀποτετμημένόν στερεόν



Exahedron abscisum solidum

X

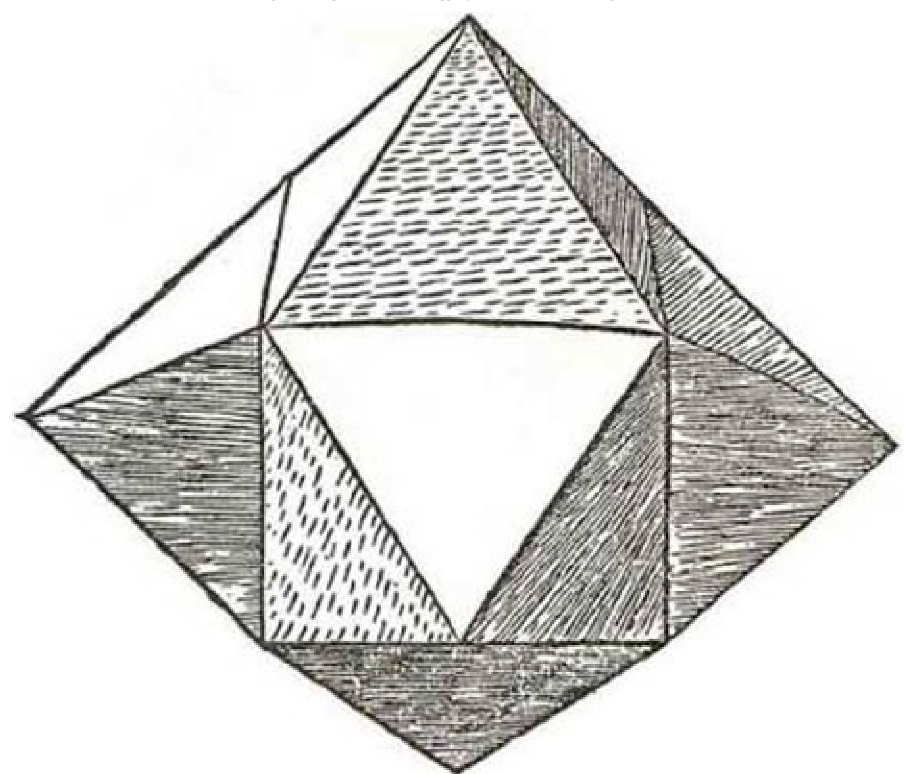
Ἑξάεδρον ἀποτετμημένον κένον



Exahedron abscisum vacuum

XI[135]

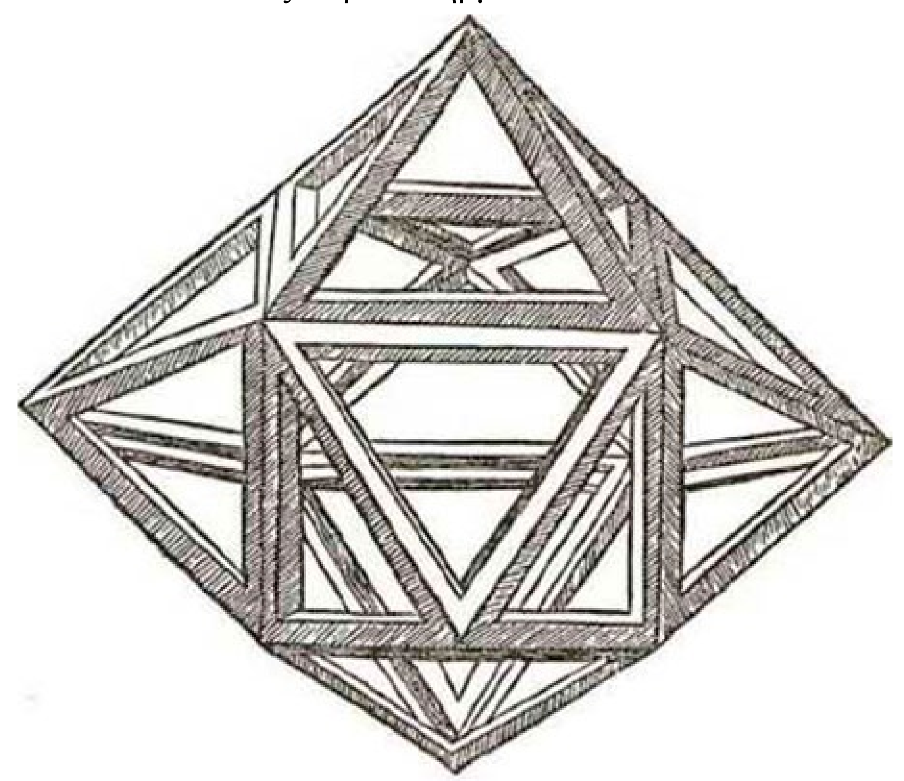
Ἑξάεδρον επηρμένον στερεόν



Exahedron elevatum solidum

XII[136]

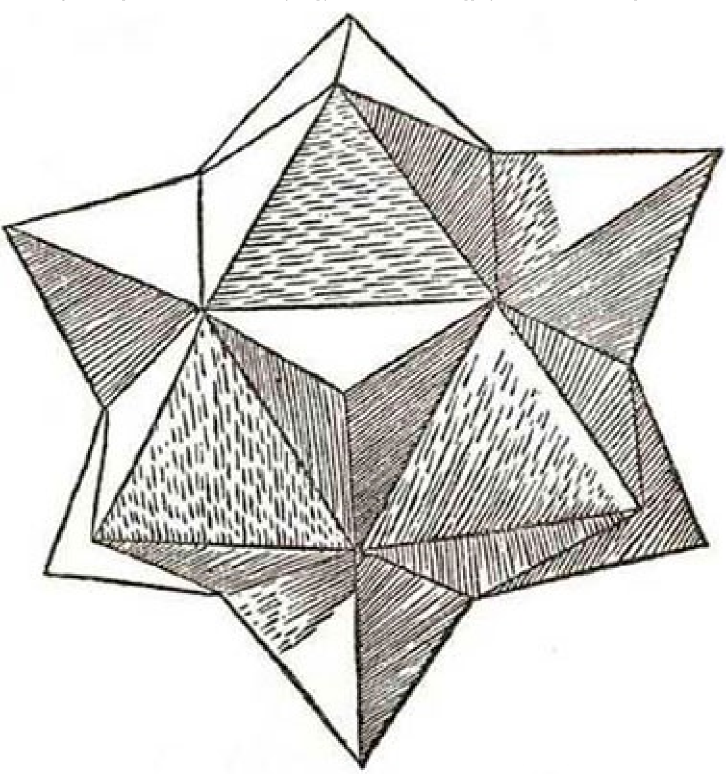
Ἑξάεδρον ἐπηρμένον κένον



Exahedron elevatum vacuum

XIII

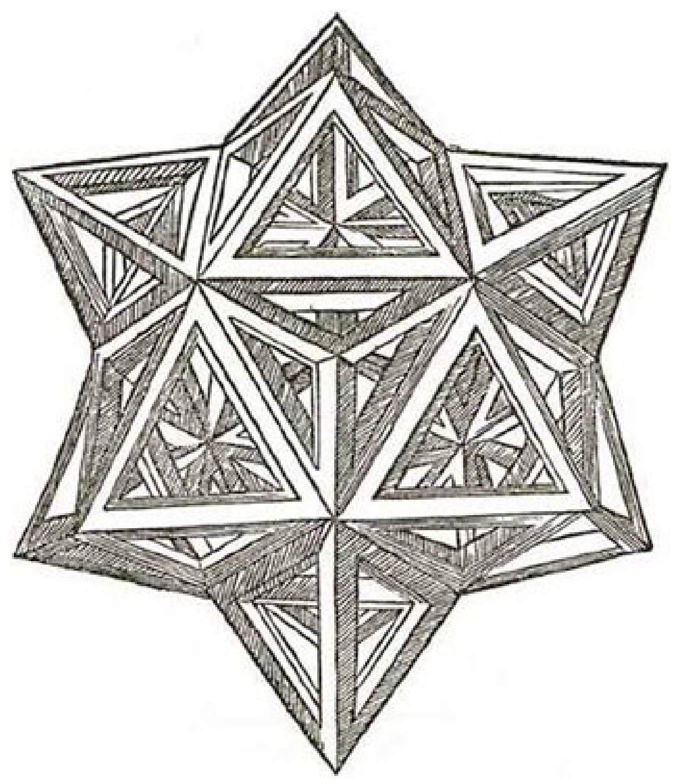
Ἑξάεδρον αποτετμημένον ἐπηρμένον στερεόν



Exahedron (sive cubus) abscisum elevatum solidum

XIV

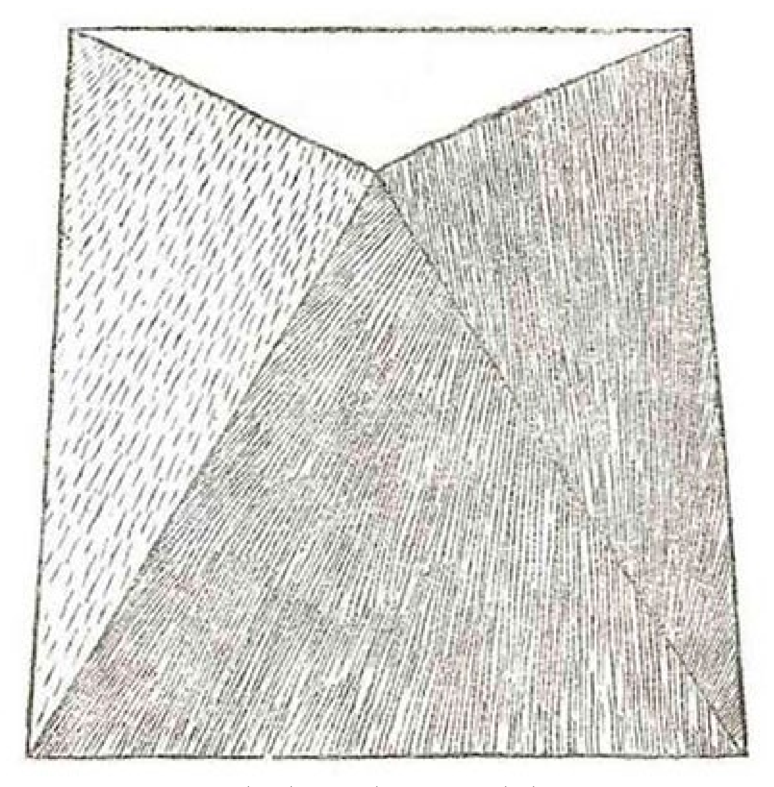
Ἑξάεδρον ἀποτετμημένον ἐπηρμένον κένον



Exahedron abscisum elevatum vacuum

XV

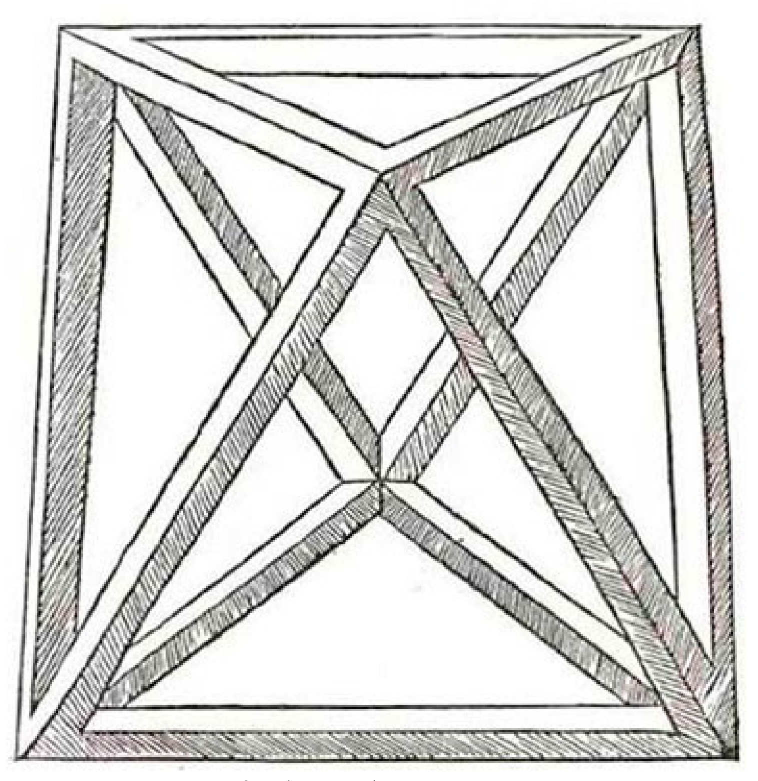
Ὀκτάεδοον ἐπίπεδον στεοεόν



Octahedron planum solidum

XVI

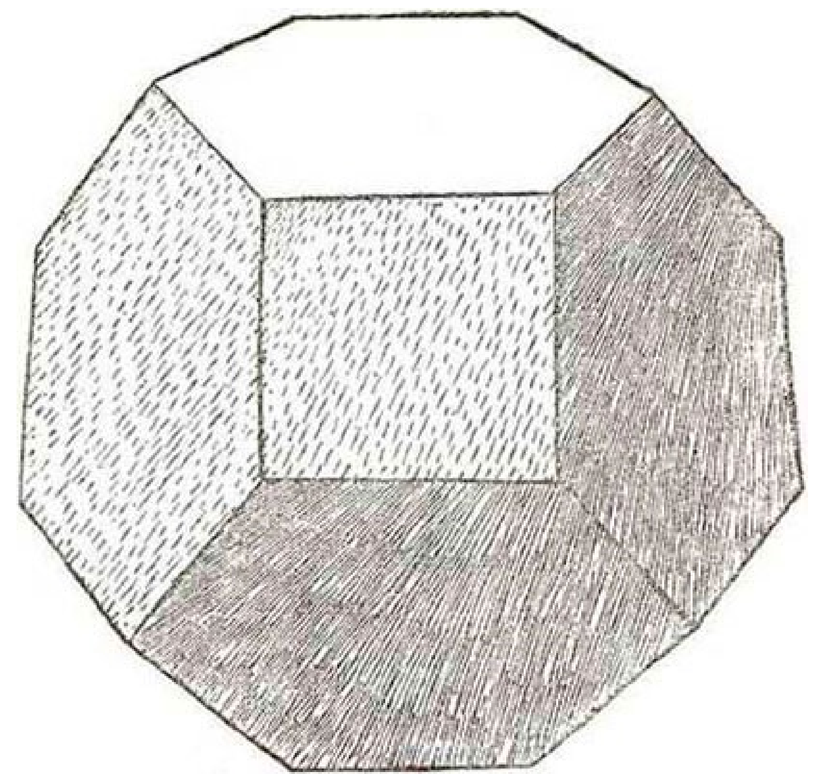
Ὀκτάεδρον ἐπίπεδον κένον



Octahedron planum vacuum

XVII

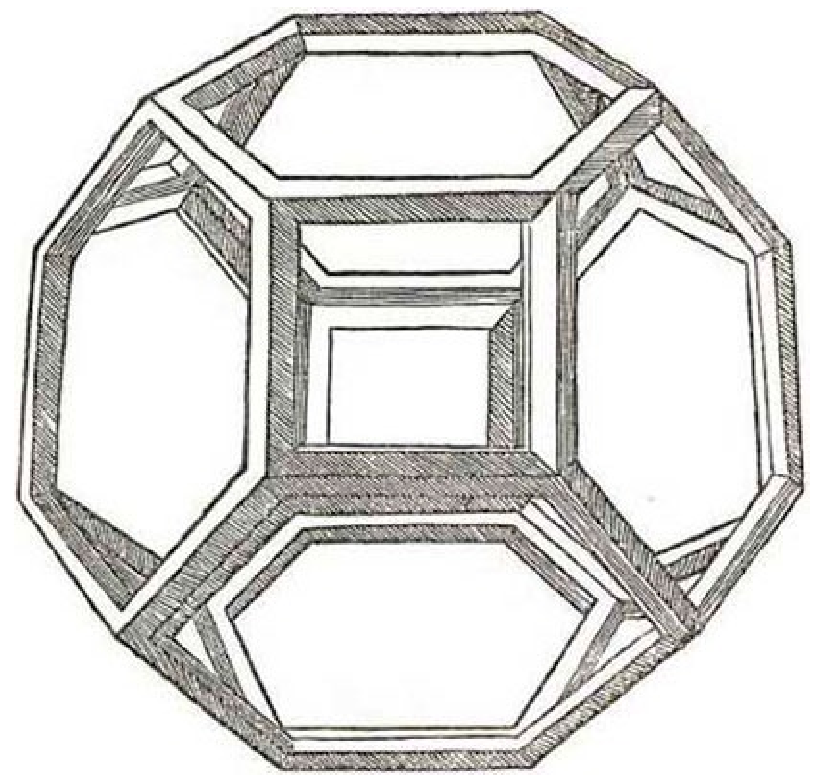
Ὀκτάεδρον ἀποτετμημένον στερεόν



Octahedron abscisutn solidum

XVIII

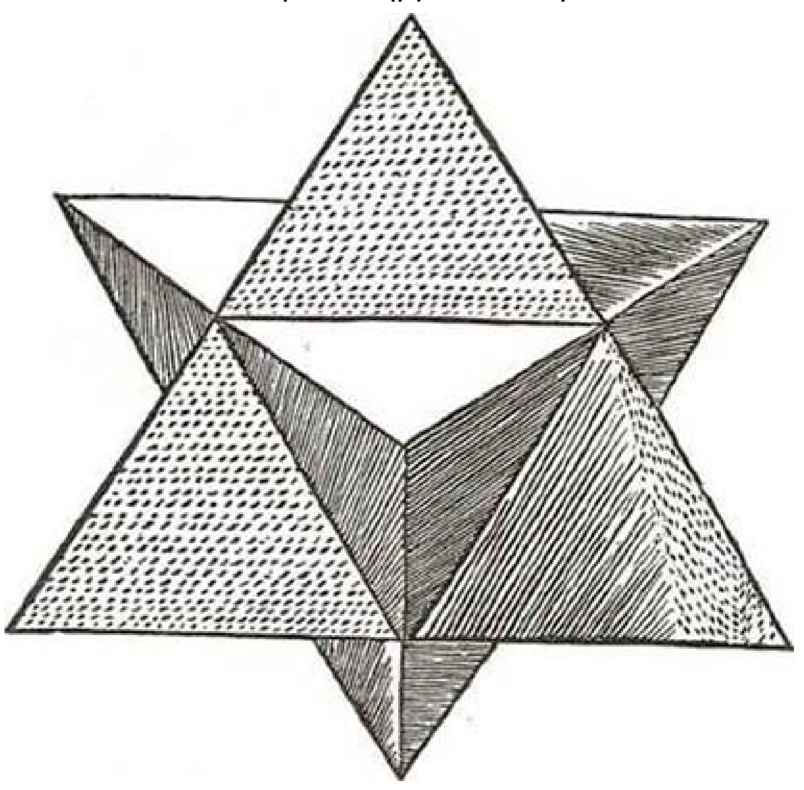
Ὀκτάεδρον ἀποτετμημένον κένον



Octahedron abscisum vacuum

XIX

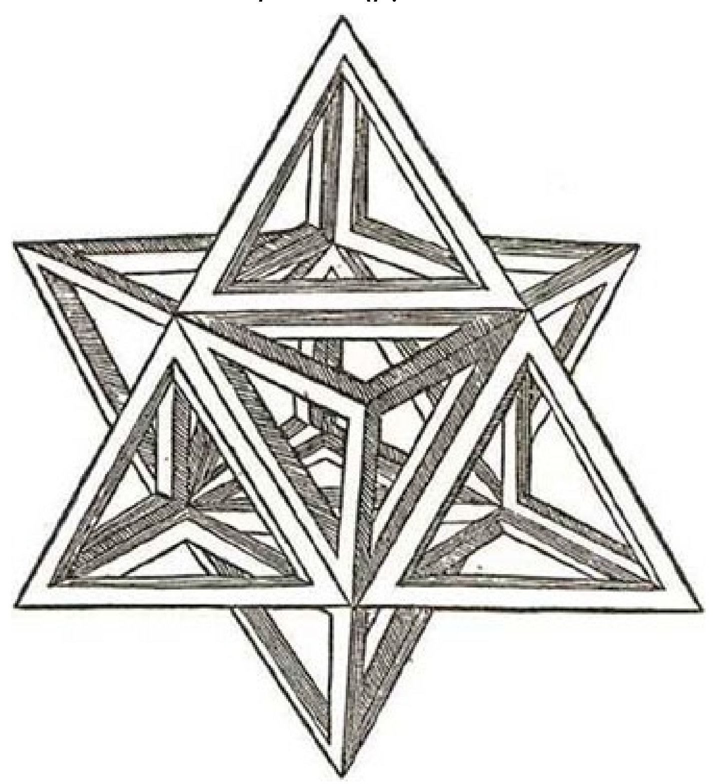
Ὀκτάεδρον ἐπηρμένον στερεόν



Octahedron elevatum solidum

XX

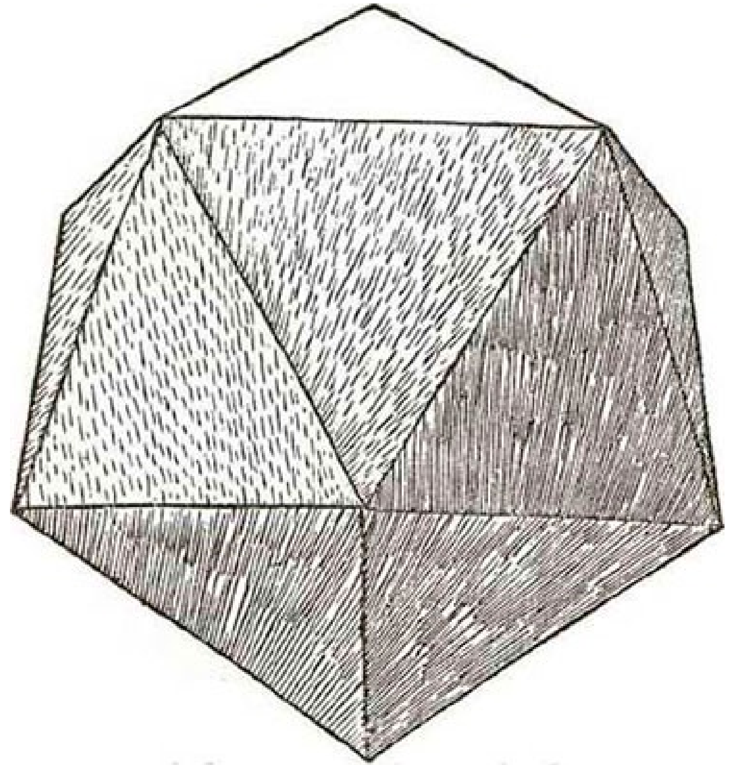
Ὀκτάεδρον ἐπηρμένον κένον



Octahedron elevatum vacuum

XXI

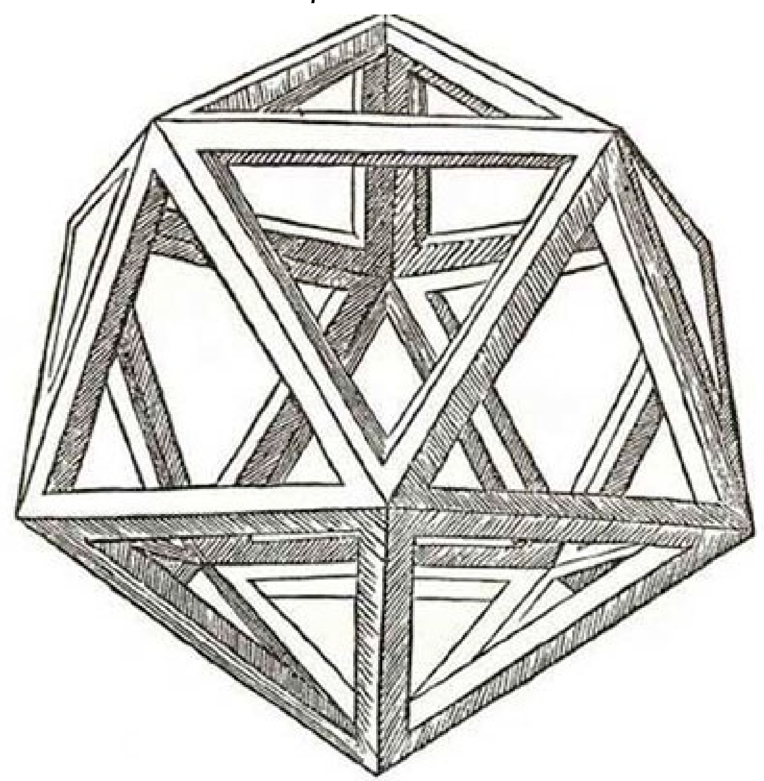
Εἰκοσάεδρον ἐπίπεδον στερεόν



Icosahedron planum solidum

XXII

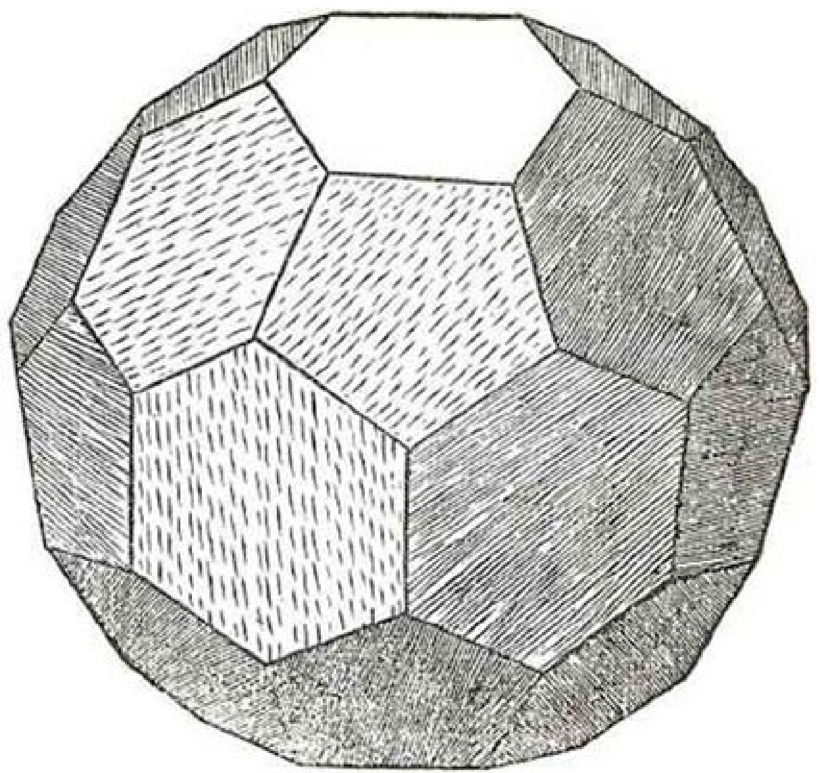
Εἰκοσάεδρον ἐπίπεδον κένον



Icosahedron planum vacuum

XXIII

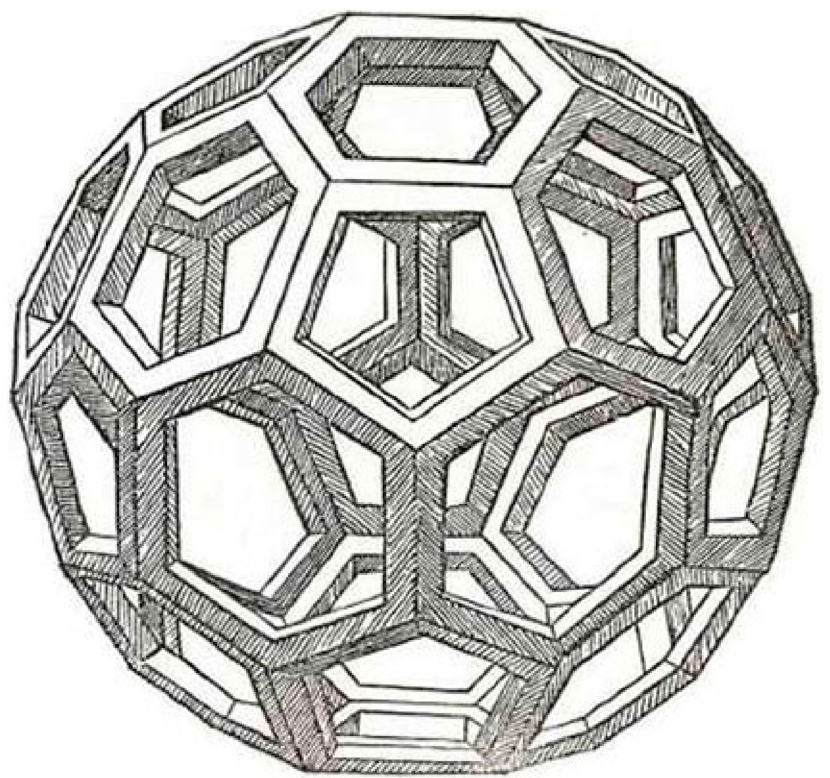
Εἰκοσάεδρον ἀποτετμημένον στερεόν



Icosahedron abscisum solidum

XXIV

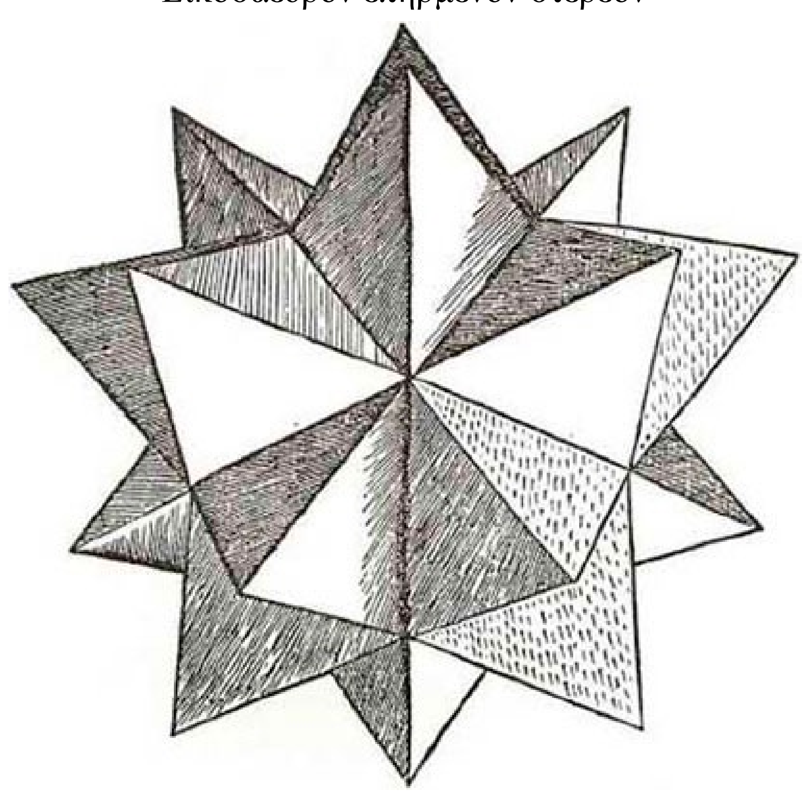
Εἰκοσάεδρον ἀποτετμημένον κένον



Icosahedron abscisum vacuum

XXV

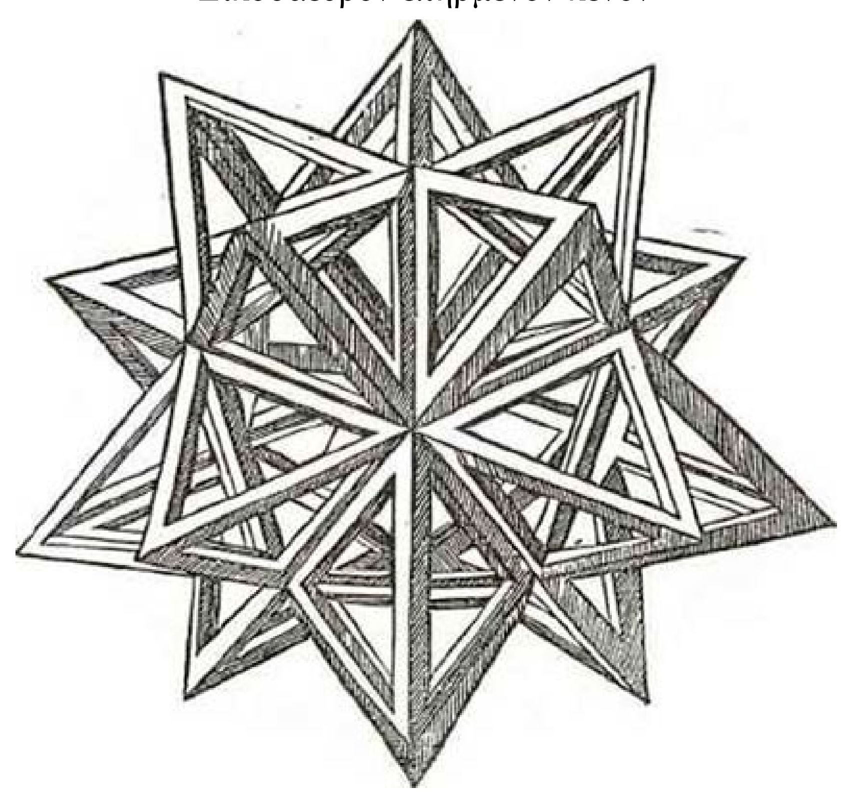
Εἰκοσάεδρον ἐπηρμένον στερεόν



Icosahedron elevatum solidum

XXVI

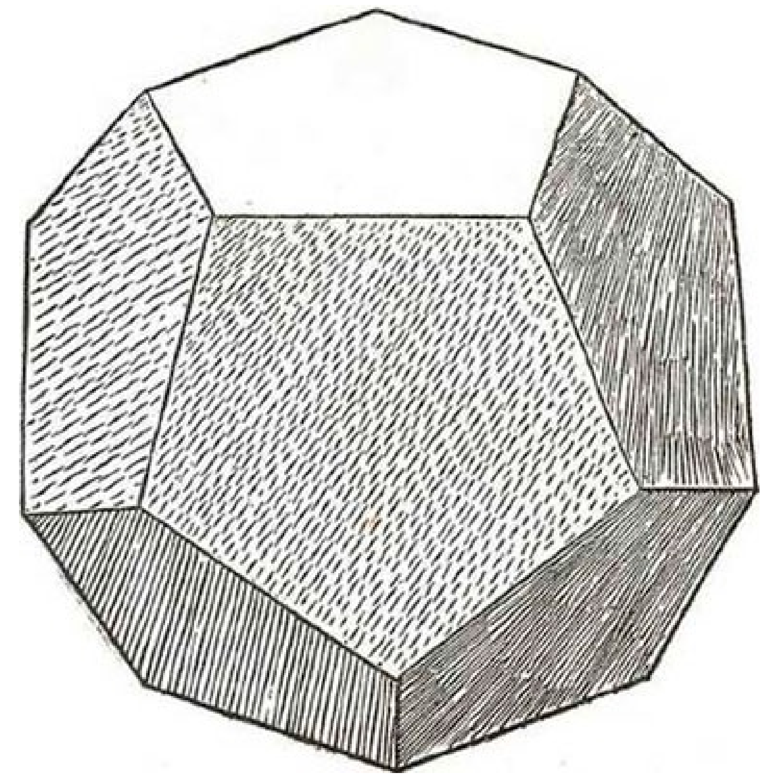
Εἰκοσάεδρον ἐπηρμένον κένον



Icosahedron elevatum vacuum

XXVII

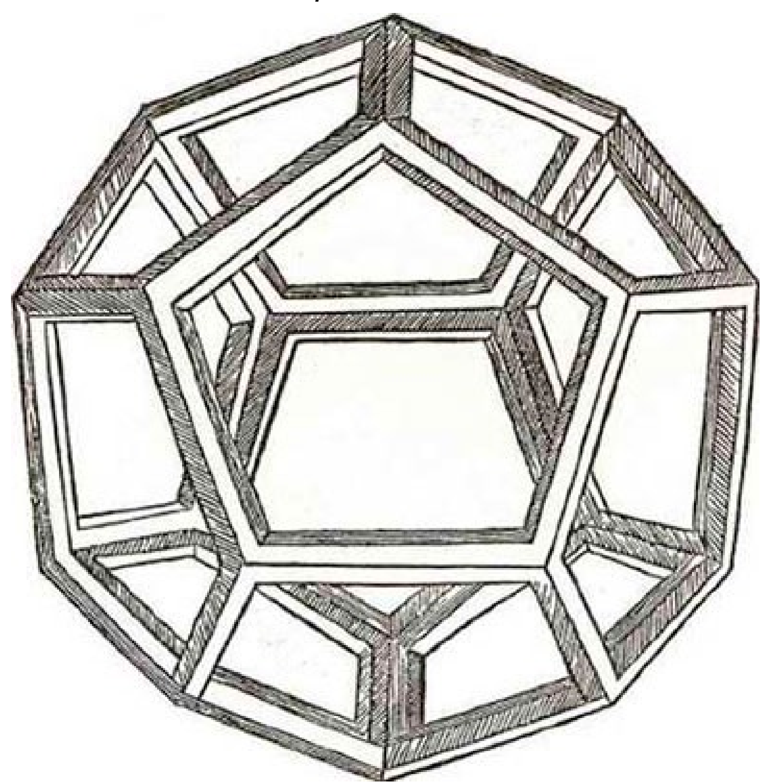
Δοδεκάεδρον ἐπίπεδον στερεόν



Dodecahedron planum solidum

XXVIII

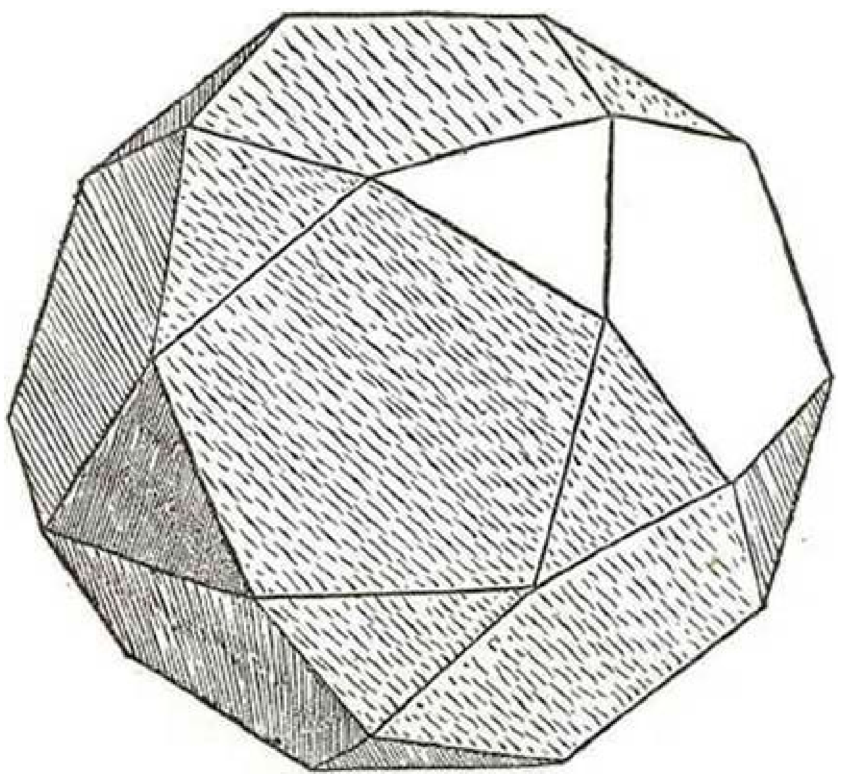
Δοδεκάεδρον ἐπίπεδον κένον



Dodecahedron planum vacuum

XXIX

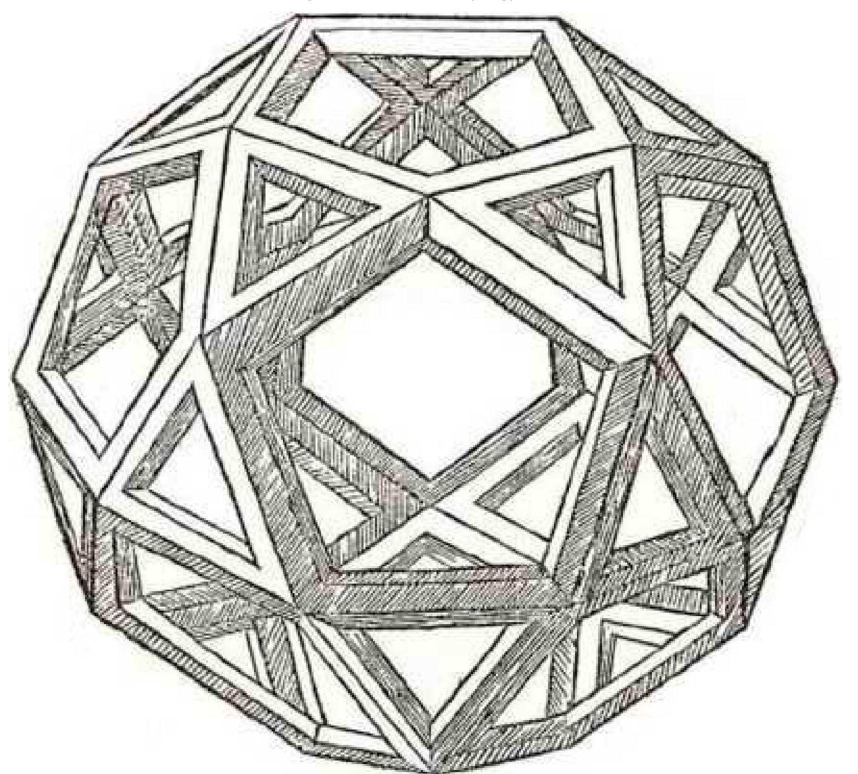
Δοδεκάεδρον ἀποτετμημενον στερεόν



Dodecahedron abscisum solidum

XXX

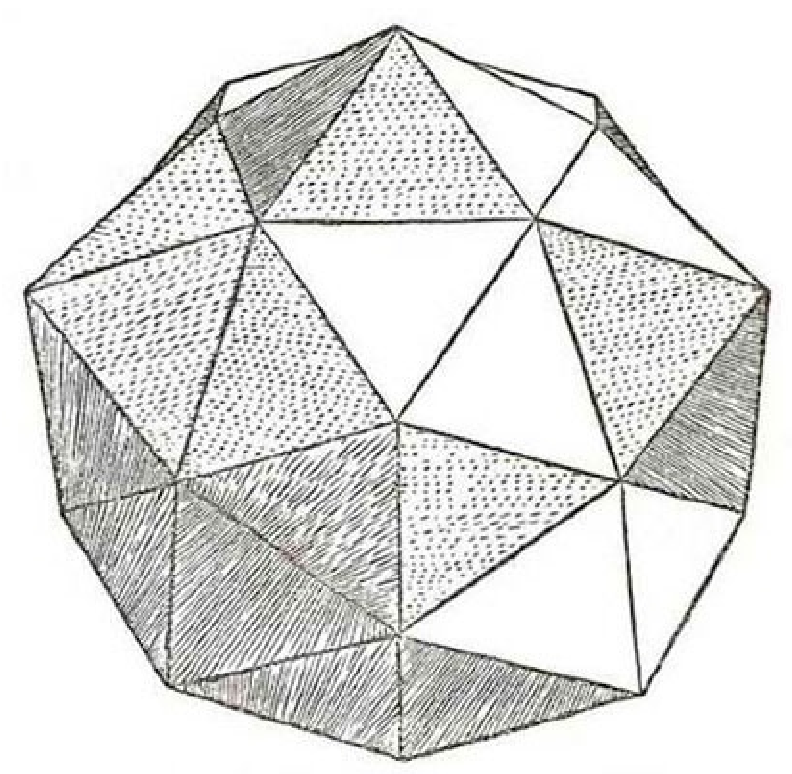
Δοδεκαεδρον ἀποτετμημένον κένον



Dodecahedron abscisum vacuum

XXXI

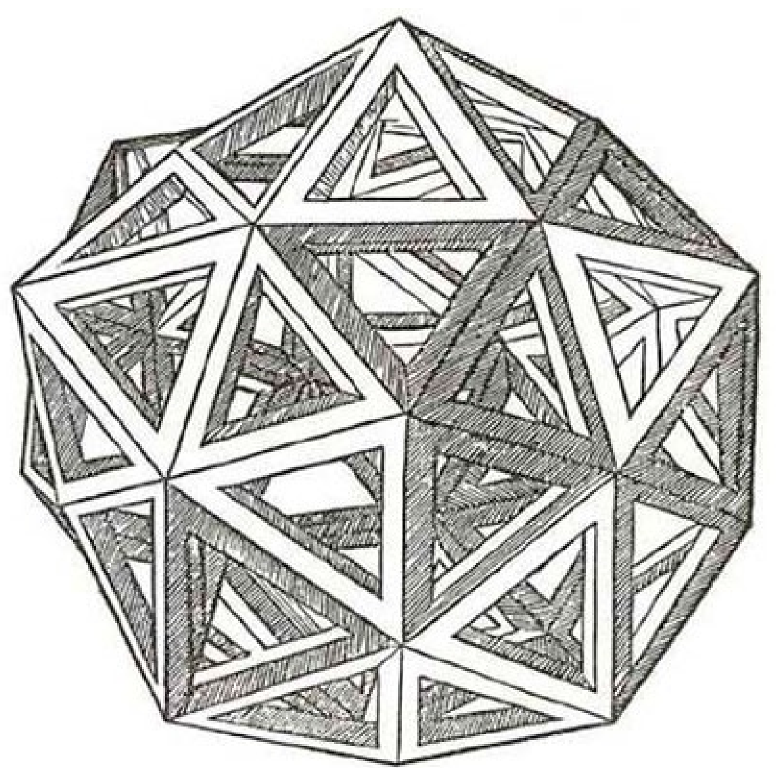
Δοδεκάεδρον ἐπηρμένον στερεόν



Dodecahedron elevatum solidum

XXXII

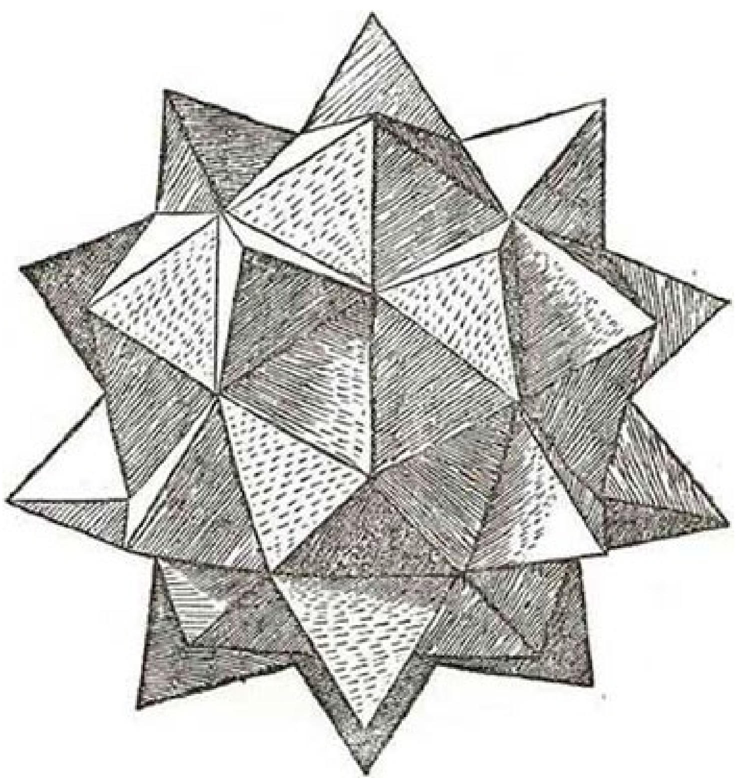
Δοδεκάεδρον ἐπηρμένον κένον



Dodecahedron elevatum vacuum

XXXIII

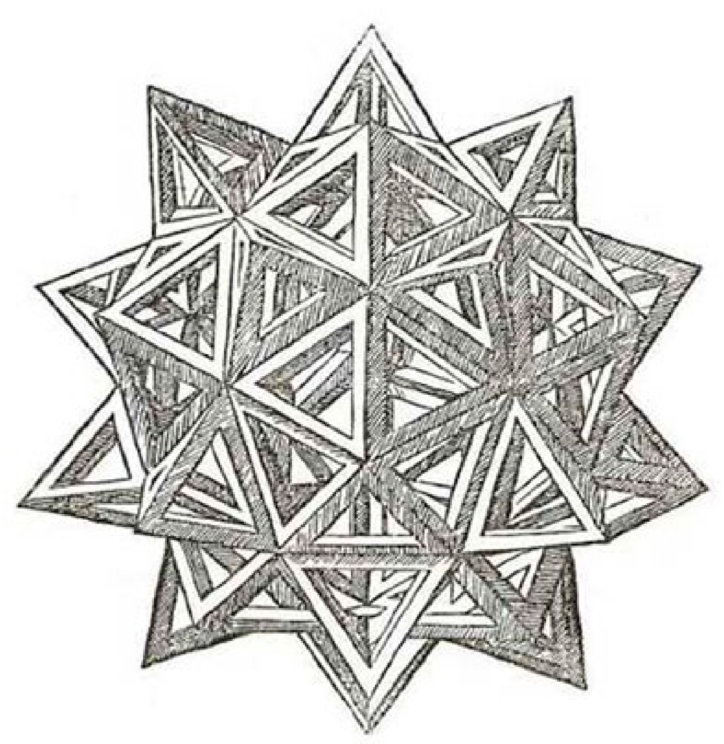
Δοδεκάεδρον ἀποτετμημένον ἐπηρμένον στερεόν



Dodecahedron abscisum elevatum solidum

XXXIV

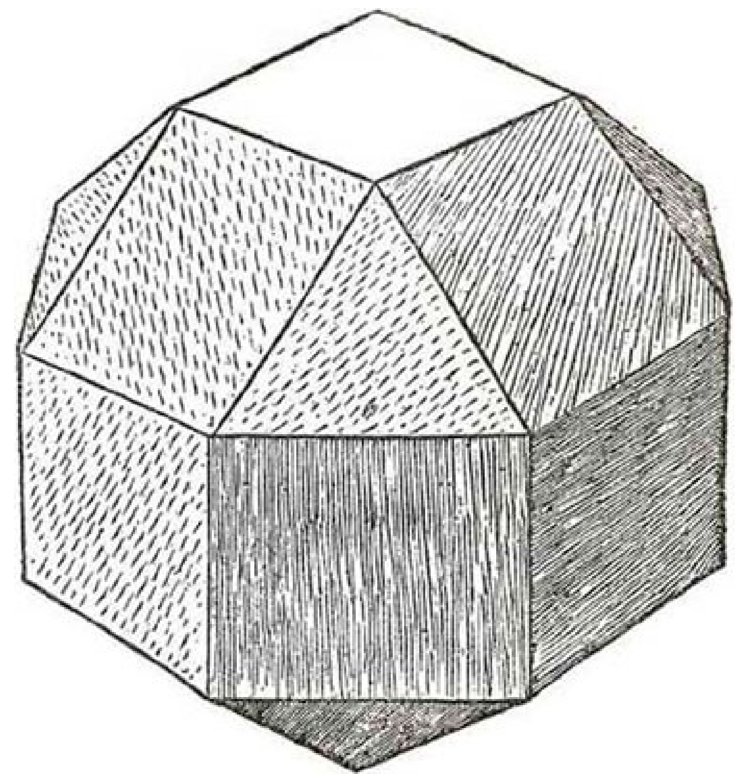
Δοδεκάεδρον ἀποτετμημένον ἐπηρμένον κένον



Dodecahedron abscisum elevatum vacuum

XXXV

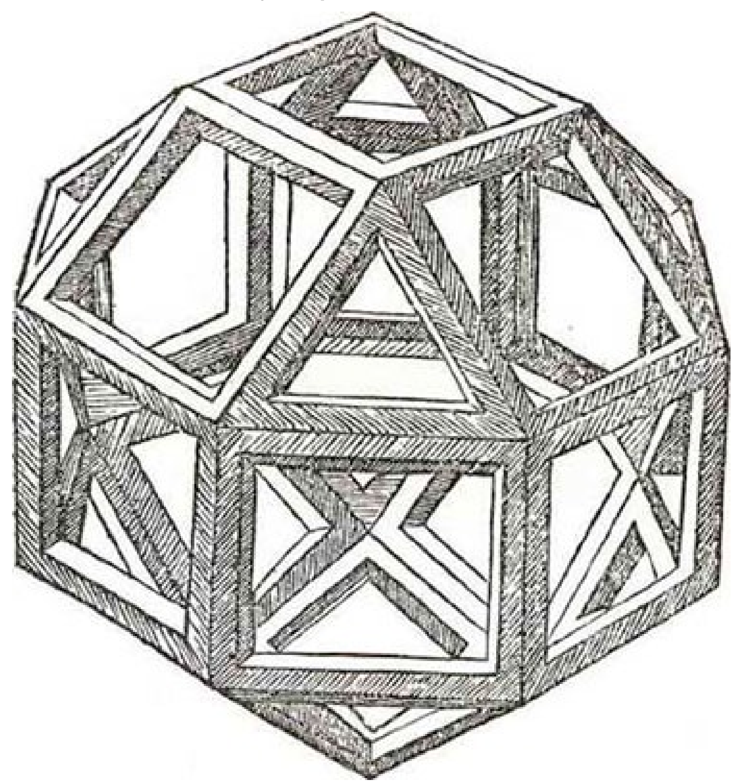
Εἰκοσιεξάεδρον ἐπίπεδον στερεόν



Vigintisex basium planum solidum

XXXVI

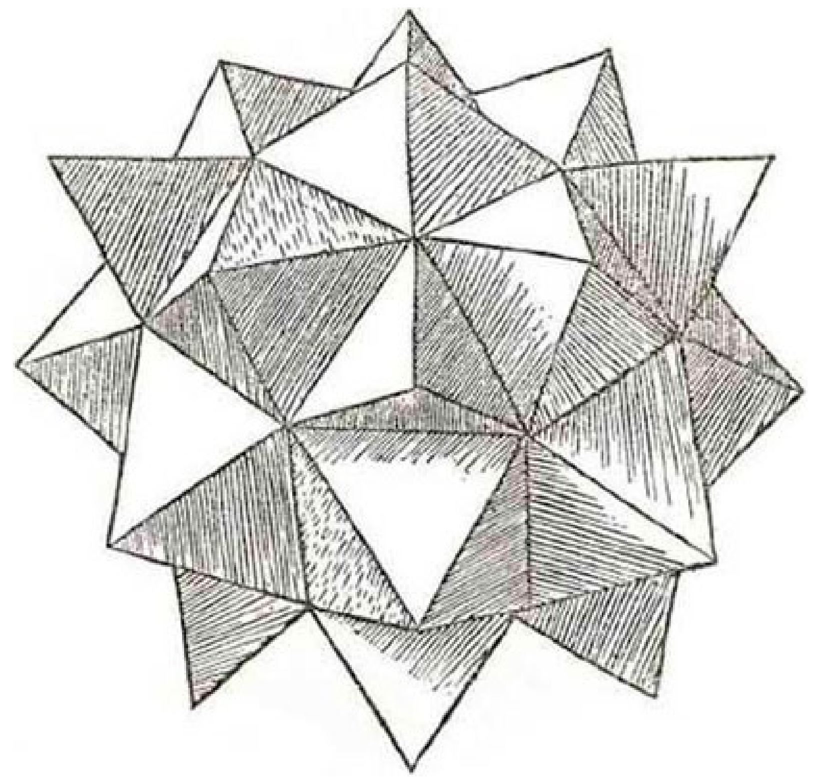
Εἰκοσιεξάεδρον ἐπίπεδον κένον



Vigintisex basium planum vacuum

XXXVII

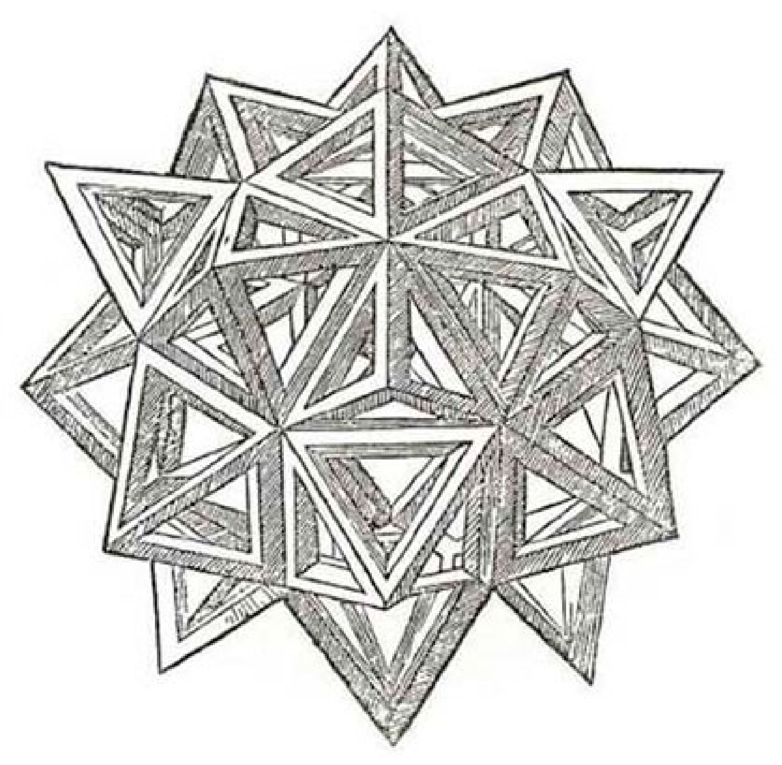
Είκοσιεξάεδρον ἐπηρμένον στερεόν



Vigintisex basium abscisum elevatum solidum

XXXVIII

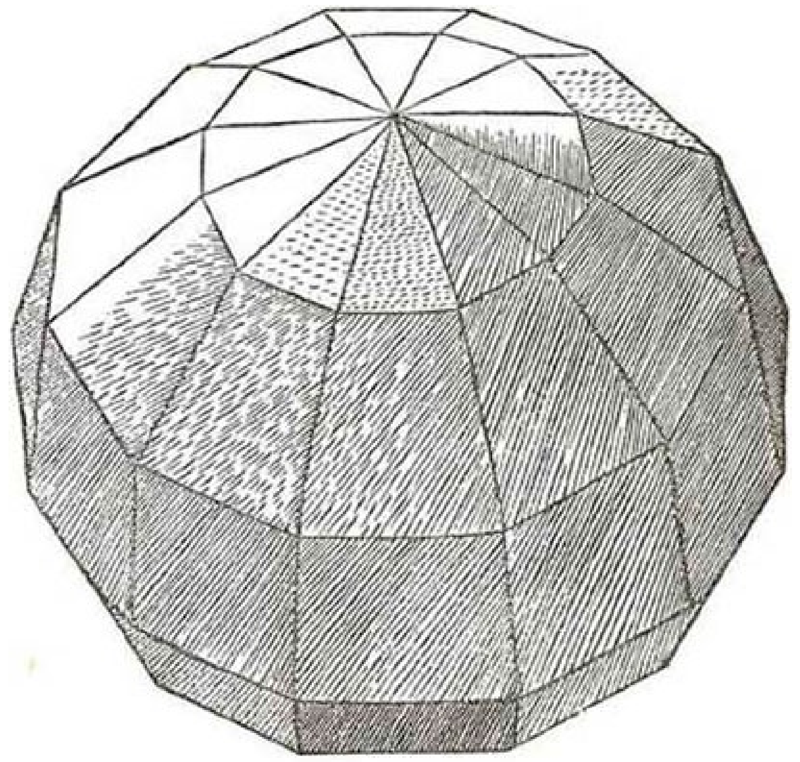
Εἰκοσιεξάεδρον ἐπηρμένον κένον



Vigintisex basium abscisum elevatum vacuum

XXXIX

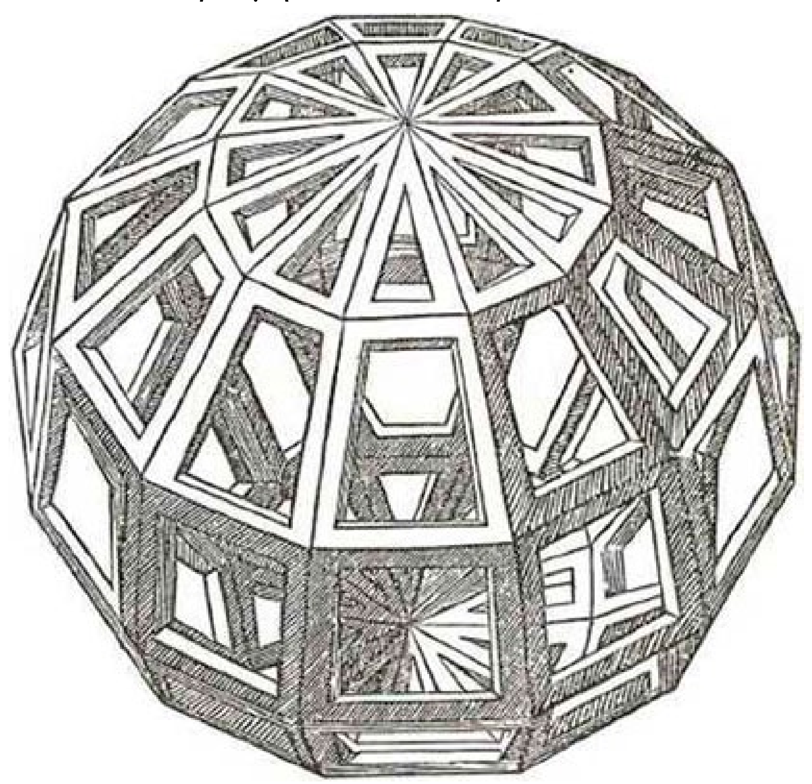
Ἐβδομηκονταδισσάεδρον στερεόν



Septuaginta duarum basium solidum

XL

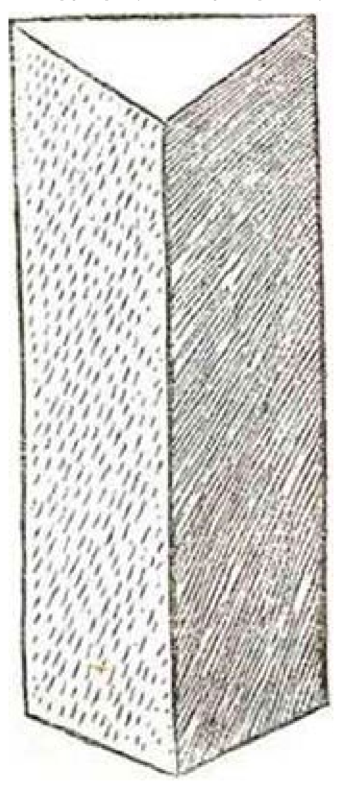
Ἐβδομηκονταδισσάεδρον κένον



Septuaginta duarum basium vacuum

XLI

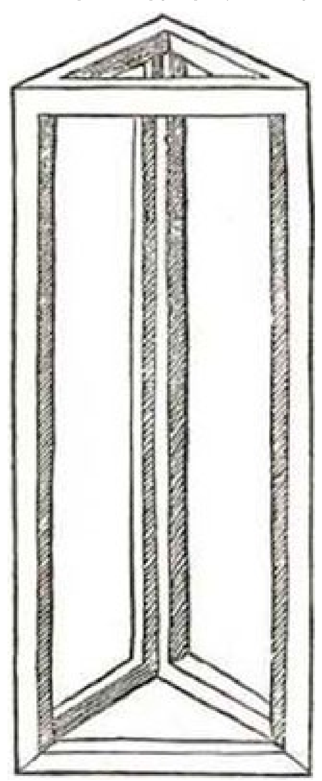
Κίων πλευρώδης τρίγωνος [ἢ σῶμα κλειστόν]



Columna laterata triangula solida [seu corpus seratile]

XLII

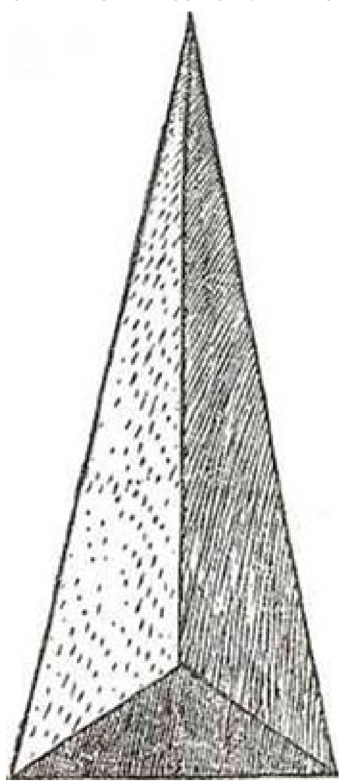
Κίων πλευρώδης τρίγωνος κένος



Columna laterata triangula vacua

XLIII

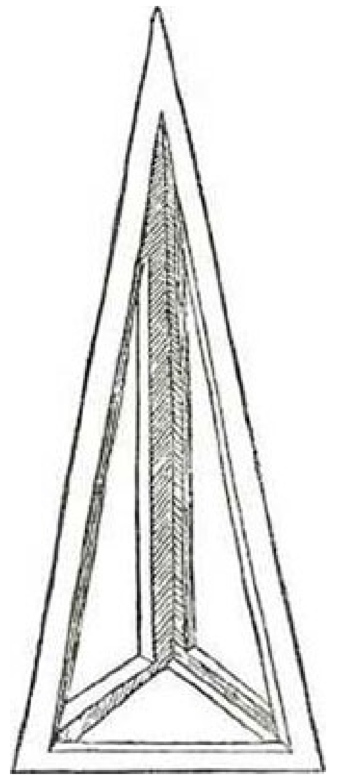
Πυραμὶς πλευρώδης τρίγωνος στερεά



Pyramis laterata triangula solida

XLIV

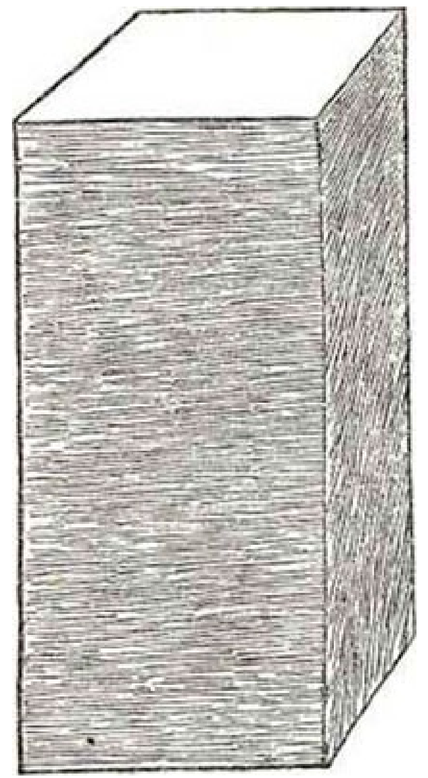
Πυραμις πλευρώδης τρίγωνος κένη



Pyramis laterata triangula vacua

XLV

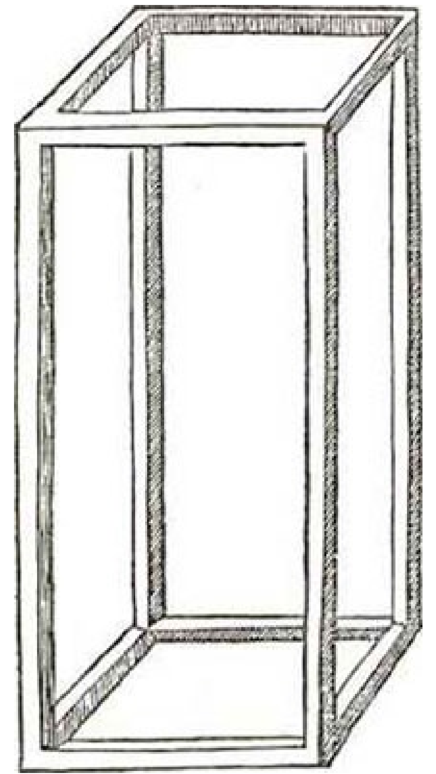
Κίων πλευρώδης τετράγωνος στερεός



Columna laterata quadrangula solida

XLVI

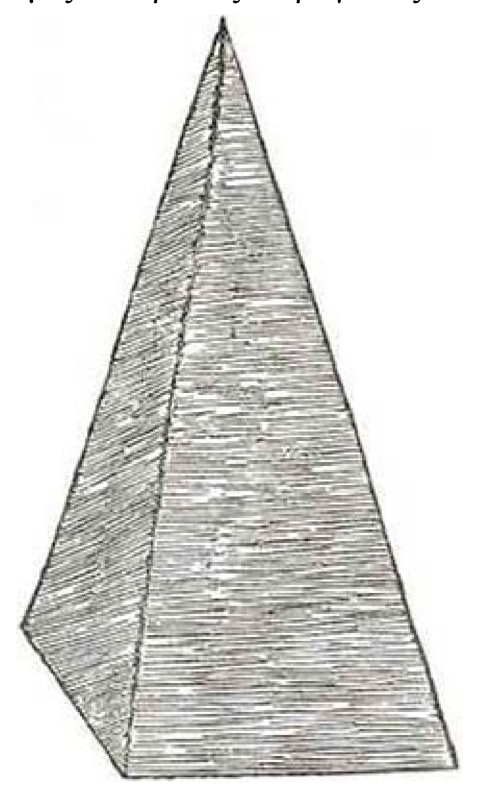
Κίων πλευρώδης τετράγωνος κένος



Columna laterata quadrangula vacua

XLVII

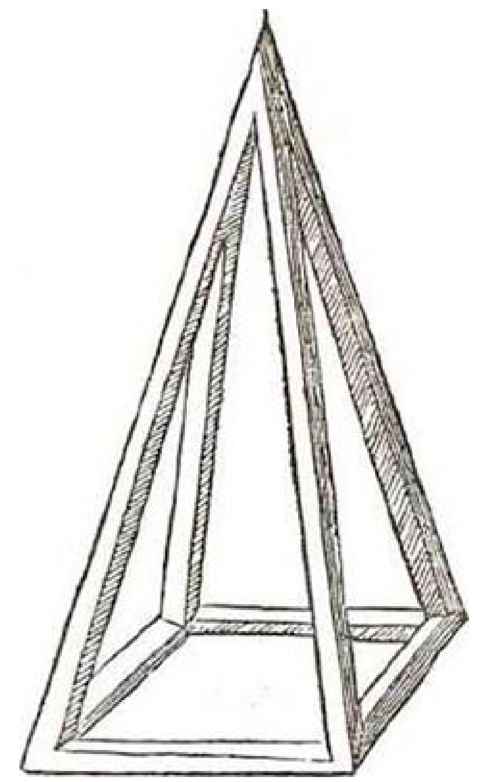
Πυραμlς πλευρώδες τετράγωνος στερεά



Pyramis laterata quadrangula solida

XLVIII

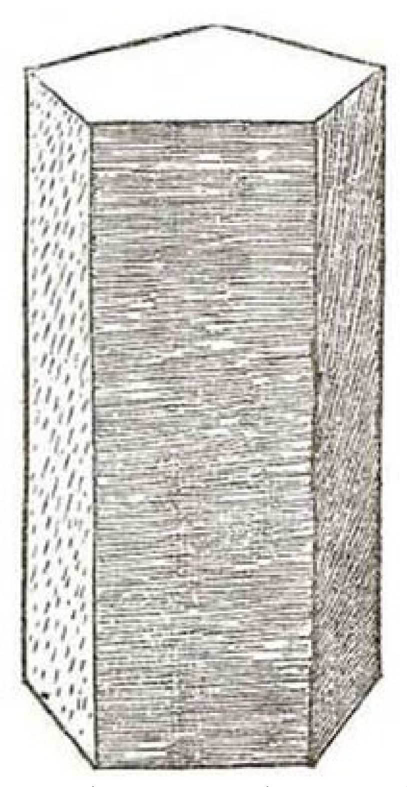
Πυραμὶς πλ,ευρώδης τετράγωνος κένη



Pyramis laterata quadrangula vacua

XLIX

κίων πλευρώδης πεντάγωνος στερεός



Columna laterata penthagona solida

L

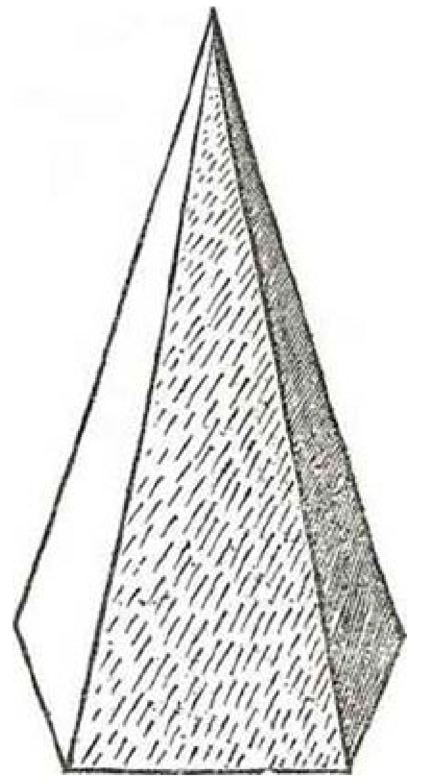
κίων πλευρώδης πεντάγωνος κένο



Columna laterata penthagona vacua

L

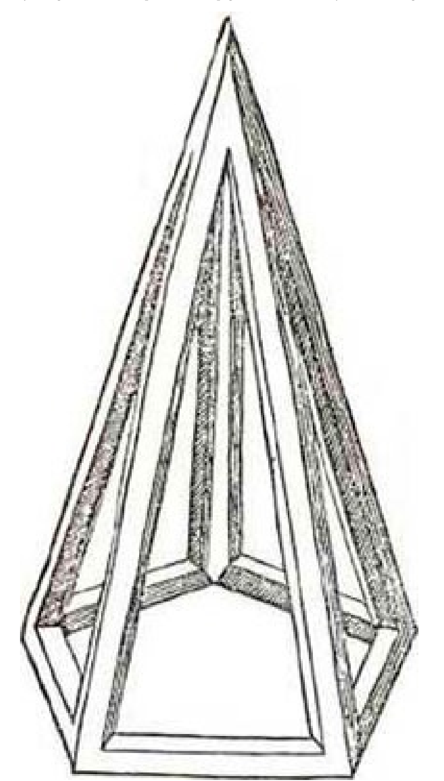
Πυραμὶς πλευρώδης πεντάγωνος στερεά



Pyramis laterata penthagona solida

LII

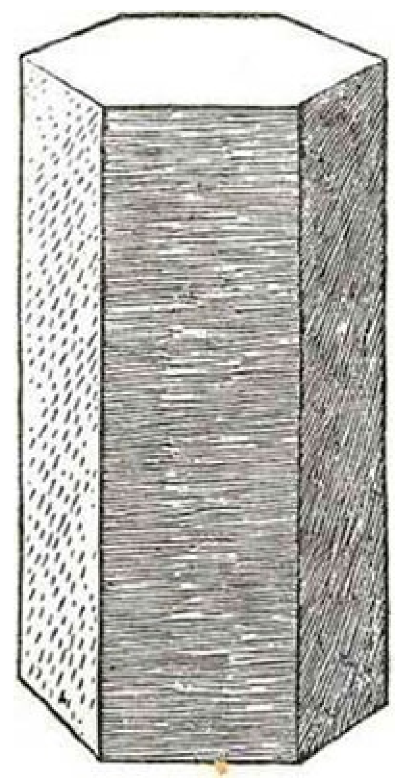
Πυραμὶς πλευρώδης πεντάγωνος κενή



Pyramis laterata penthagona vacua

LIII

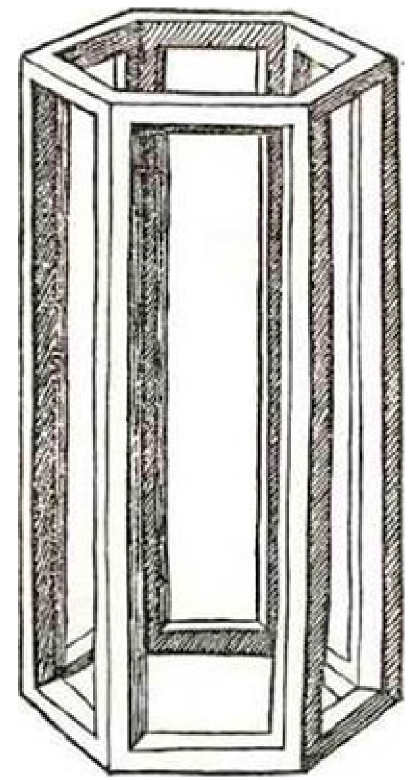
Κίων πλευρώδης ἑξάγωνος στερεός



Columna laterata hexagona solida

LIV

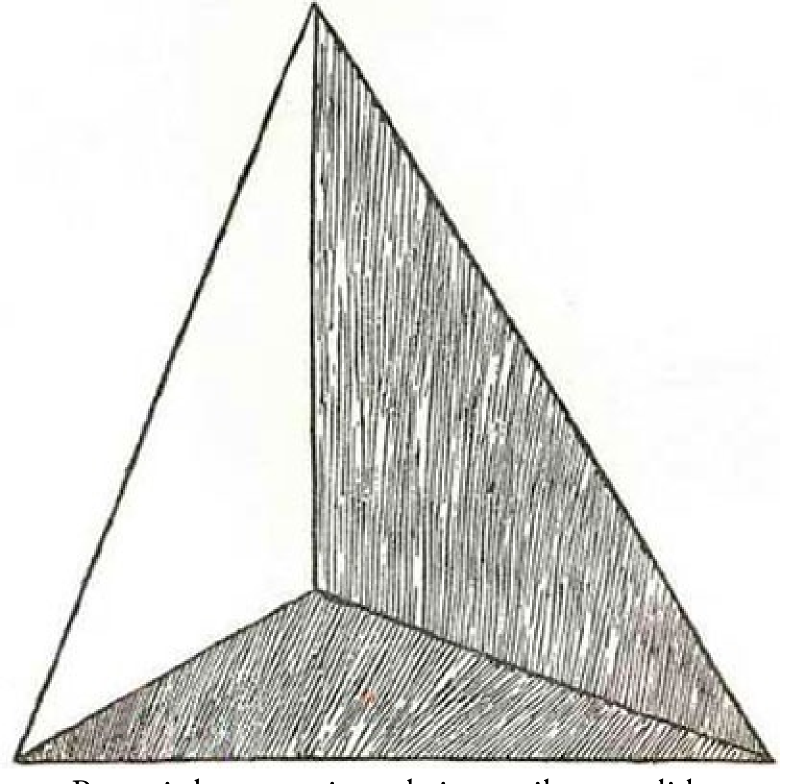
Κίων πλευρώδης ἑξάγωνος κένος



Columna laterata hexagona vacua

LV

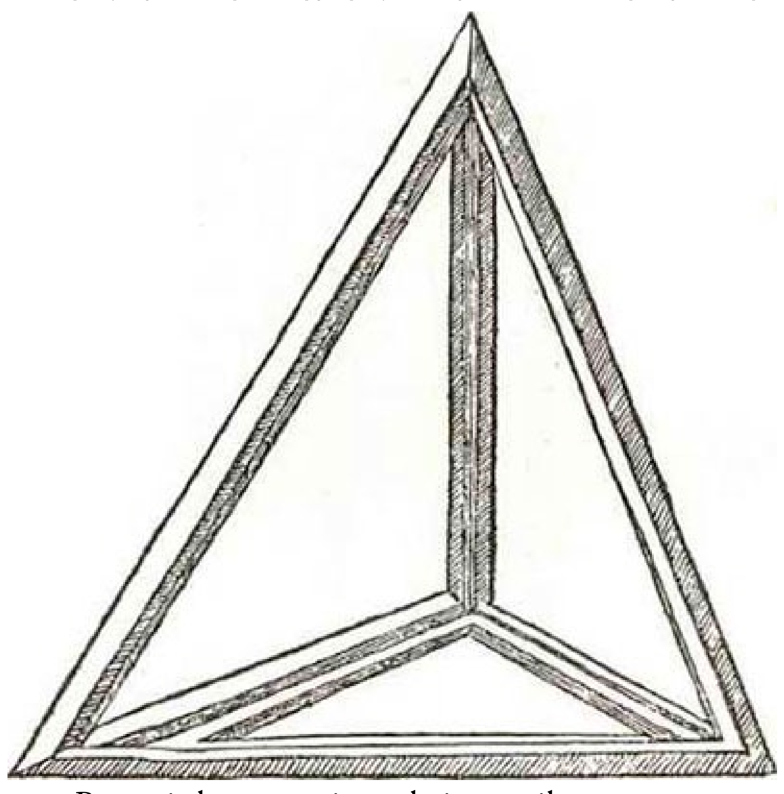
Πυραμὶς πλευρώδης τρίγωνος ἀνισόπλευρος στερεά



Pyramis laterata triangula inaequilatera solida

LVI

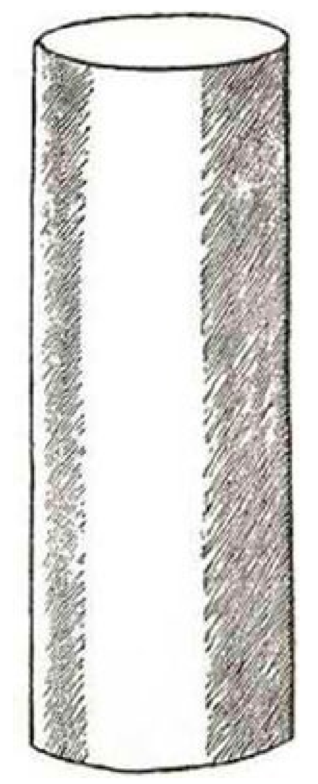
Πυραμὶς πλευρώδης τρίγωνος ανισόπλευρος κένη



Pyramis laterata triangula inaequilatera vacua

LVII

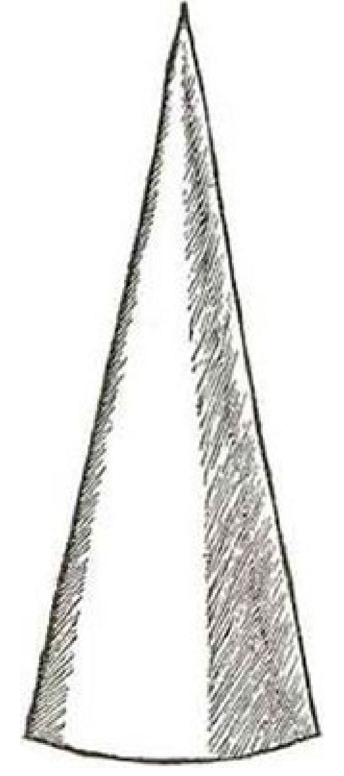
Κίων στρογγυλος στερεός



Columna rotunda solida

LVIII

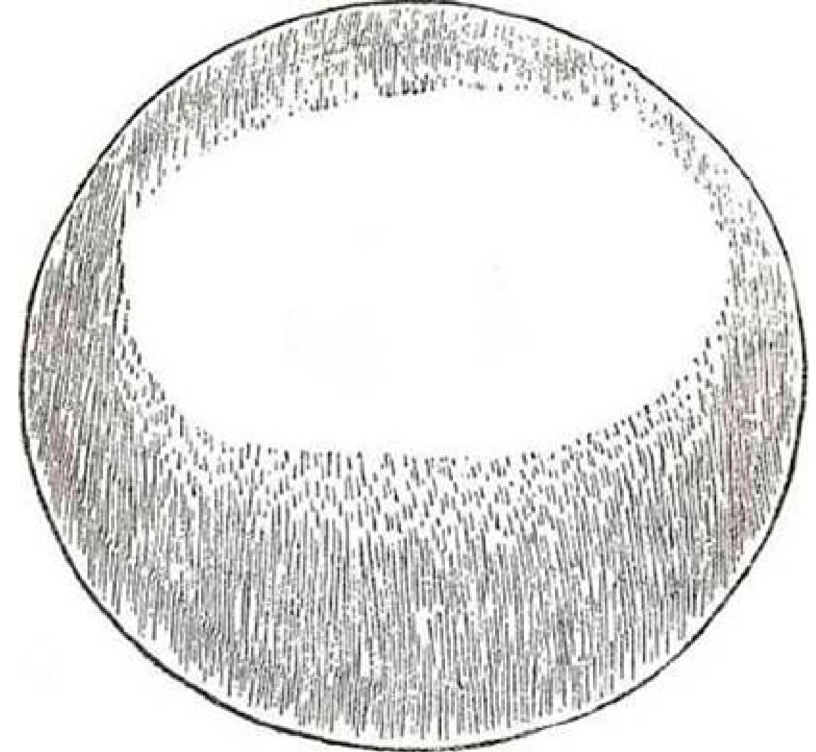
Πυραμὶς στρογγύλή στερεά



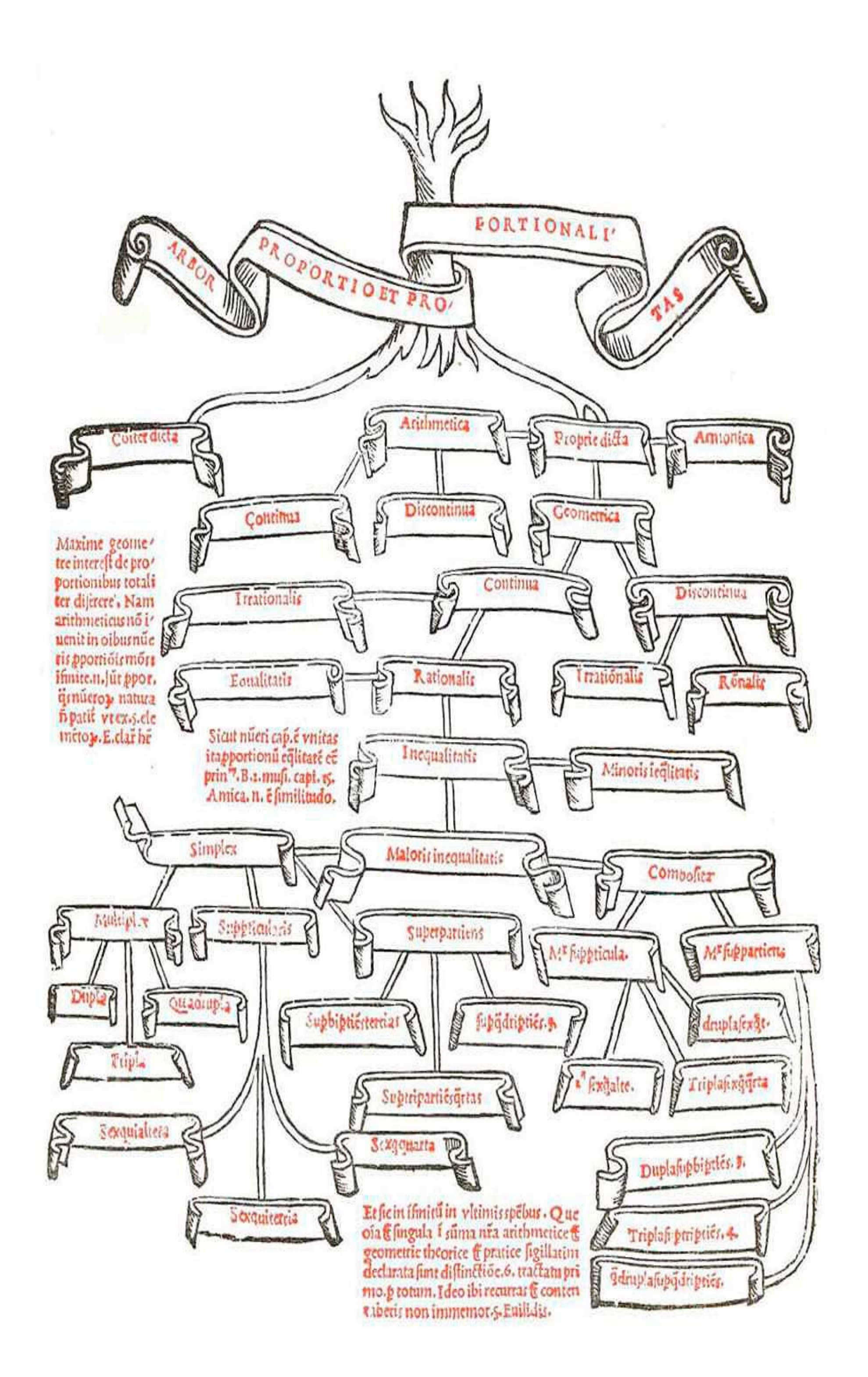
Pyramis rotunda solida

LIX

Σφαῖρα στερεά



Sphaera solida



ARBOR PROPORTIO ET PROPORTIONALITAS
Arithmetica
Proprie dicta
Armonica
Continua
Discontinua
Geometrica
Continua
Discontinua
Irrationalis
Rationalis
Irrationalis
Equalitatis
Inequalitatis
Minoris inequalitatis
Simplex
Maioris inequalitatis
Composita
Multiplex
Superparticularis
Superpartiens
Dupla
Quadrupla
Tripla
Sexquialtera
Sexquitertia
Sexquiquarta
Suprabipartiens tertias
Suprapartiens quartas
Supratripartiens quartas
Dupla sexquialtera
Tripla sexquiquarta
Duplasuprabipartiens
Triplasuprapartiens
Maxime geometre interest de proportionibus totaliter disserere. Nam arithmeticus non invenit in omnibus numeris proportionis modo infinite
Sicut numeri caput est unitas ita proportionum equalitatem esse principium
Amica n. e similitudo.
Et sic in infinitum in ultimis speciebus. Que omnia et singula in summa nostra arithmetice et geometrie theorice et pratice sigillatim declarata sunt distinctione .6. tractatu primo per totum. Ideo ibi recurras et contenteris non immemor .5. Euclidis.

INDICE DE LAMINAS

INDICE GENERAL

[EPÍSTOLA]

A sus muy queridos discípulos y alumnos Cesare dal Sasso, Cera del Cera, Rainer Francesco de Pippo, Bernardino y Marsilio da Monte, Hieronimo del Sccciarino, y compañeros de Borgo San Sepolcro, dignos canteros, sagacísimos cultores de la escultura y arquitectura, Fray Luca Paciuolo, su conterràneo de la Orden de los menores y profesor de la Sagrada Teología, *S. P. D.*

[Proemio]

PARTE TERCERA

Libellus in tres partiales tractatus divisus quinque corporum regularium et dependentium activae perscrutationis, B. Petro Soderino Principi Perpetuo PopuIi Fiorentini a M. Luca Paciolo burgense minoritano particulariter dicatus, feliciter incipit

TRATADO PRIMERO



Fray LUCA BARTOLOMEO DE PACIOLI o LUCA DI BORGO SAN SEPOLCRO (Sansepolcro, c. 1445 - 1517) fue un fraile franciscano, matemático precursor del cálculo de probabilidades y economista italiano. Su apellido también aparece escrito como Paccioli y Paciolo.

Se sabe poco de sus primeros años de vida. Luca Pacioli nació hacia 1445 en Borgo del Santo Sepolcro (actual Sansepolcro), una pequeña ciudad comercial en la Toscana, donde tenía su estudio el pintor Piero della Francesca. Su padre fue Bartolomeo Pacioli.

Dejó Sansepolcro siendo todavía joven, al entrar al servicio de Antonio Rompiasi, un rico comerciante de Venecia. Pacioli era el tutor de los tres hijos de Rompiasi, a la vez que le ayudaba en los negocios. A si mismo, en Venecia, comienza a estudiar matemáticas con Domenico Bragadino, que lo inicia en la geometría y en el álgebra.

A la muerte de Antonio Rompiasi, alrededor de 1470, dejó Venecia y se estableció en Roma con Leon Battista Alberti, secretario personal del Papa. Allí estudió teología y en 1477 fue

ordenado fraile franciscano.

Entre 1477 y 1480 enseñó en la Universidad de Perugia, donde escribió a tal efecto el *Tractator mathematicus ad discipulos perusinos*.

En 1489 regresó a su ciudad de origen, Sansepolcro, para enseñar. En este periodo, en su localidad natal, es cuando escribió *Summa de arithmetica, geometría, proportioni et proportionalita precipitevolissimevolmente*, dedicado a Guidobaldo de Montefeltro, duque de Urbino. La *Summa* fue publicada en Venecia en 1494.

Ese mismo año Ludovico Sforza se convirtió en duque de Milán y hacia 1496 invita a Pacioli a ir a su corte en Milán para enseñar matemáticas. En Milán Luca Pacioli comenzó a trabajar con Leonardo da Vinci, que era pintor e ingeniero en la corte de Ludovico. En esta época escribió *De Divina Proportione*, con ilustraciones de Da Vinci.

Entre 1500 y 1506 Pacioli enseñó geometría en Florencia, en la Universidad de Pisa. En estos años trabajó con Scipione del Ferro y fue elegido superior de la Orden franciscana en Romaña. Entre otras obras, escribió *De viribus quantitatis*, sobre matemáticas y magia (1496-1508), una traducción de los Elementos de Euclides (*Geometria*, Venecia, 1509) y un manual de ajedrez (*De ludo scacchorum*).

Notas

[1] *La Editorial Losada publicará próximamente una versión castellana de la obra de* DÜRER *sobre las proporciones del cuerpo humano. La traducción es obra de los doctores* AMADO ALONSO *y* GUILLERMO THIELE [N. d. E.]. <<

[2] *Divina Proportione* (Venetia, Paganinus de Paganinis, 1509). El mencionado ejemplar, que pertenece a la biblioteca del Dr. Teodoro Becü, se compone de 6 ff nn + 34 num (1 bl) + 26 (numerados por error 27) +27 nn primero la figura humana, después 23 ff con el alfabeto + 3 ff con figuras arquitectónicas + 59 (mal numerados) con las figuras geométricas + 1 f con el *arbor* (reproduciendo, mejorado, el folio 82 de la *Summa* del mismo autor) + 1 f blanco. Total 154 ff. Concuerda con PHILIP HOFER en STANLEY MORISON.

En esta edición se reproducen en facsímil (tamaño reducido) todas las figuras marginales y las láminas, respetándose su orden de distribución con excepción de la figura humana, y de algunos esquemas al margen cuya ordenación original no corresponde a la del texto. <<

[3] Esta parte es más bien una traducción que hizo PACIOLI del *Libellus de quinque corporibus regularibus* de PIERO DELLA FRANCESCA <<

[4] *Euclidis opera omnia* (Lipsiae, 1883-1916). <<

[5] Tales indicaciones corresponden al texto de la edición bilingüe publicada por FRANK GRANGER en la colección “The Loeb Classical Library” (London, 1931-1934). <<

[6] Al final del índice, que en esta edición hemos sustituido por uno moderno, Pacioli anota: “Lectore atua comodita in questo ho voluto lasciare nelle margine amplio spacio considerando che simili discipline sempre se studiano con la penna in mano e mai al mathematico avança campo experto”. <<

[7] Expresión textual: *scalpta*. <<

[8] Transcribo las palabras latinas que no puedo traducir, pues en el original falta por lo menos una línea: Alter quasi gradus /…/ nescio quos architectis struit et marmorariis nostratibus. Sin embargo, se adivina el sentido general, el cual indica que la segunda parte añadida vendría a ser “una especie de introducción” (*quasi gradus*) a cuestiones que interesan a arquitectos y canteros. <<

[9] *El Quirinale*. <<

[10] En el texto italiano figura Valtorri. <<

[11] Véase el Prólogo, p. 38. <<

[12] *Probable omisión en el texto original entre la última línea del folio 2 y la primera del folio 3* (… chel buono ingegno ale mathematici sia aptissimo acadau |……| che le sieno de grandissima abstractione… etc.). *De no haber omisión, habría que leer acadache, expresión que Pacioli podría haber inventado en lugar de* a(v)vegnache, *pues tendría la misma estructura semántica. La traducción concilia ambas posibilidades*. <<

[13] Op. cit.: *antepenúltima*. <<

[14] *Como es imposible traducir literalmente, transcribo la expresión de* Pacioli *correspondiente a esta última proposición*: E piu che possa la linea fia el suo cuadrato. *El verbo* potere, *usado aquí en 3.ª persona del presente del subjuntivo, es traducción del verbo griego* δύναμαι *que emplea* Euclides. *Véase, por ejemplo, el enunciado de la proposición II del libro XIII*. <<

[15] *El sentido de esta última proposición no está claro; parecería más*

bien una repetición de lo dicho anteriormente si no fuera que la segunda vez se introduce el concepto de "máxima" *potencia. Sin embargo, en mi opinión, no creo muy arriesgado interpretar que* PACIOLI *entienda por potencia —en sentido lato— de una* línea *lo que para nosotros tendría a ser la superficie formada por el conjunto de los posibles puntos en un plano correspondientes a coordenadas menores o iguales al segmento dado, en un sistema cartesiano cualquiera. La superficie máxima, en tal sentido, se da cuando tales coordenadas son ortogonales, y corresponde a la del cuadrado al cual se refiere* PACIOLI. *Véase la expresión italiana en la nota anterior.* <<

[16] *Hoy en día sabemos que los dos últimos libros, XIV y XV, no son de* EUCLIDES. *El libro XIV se debe a* HIPSICLES *y no se sabe bien quién es el autor del último. Las citas de* EUCLIDES *en* PACIOLI *corresponden al texto latino de* CAMPANO, *impreso por primera vez en 1482, en Venecia. Como no siempre concuerdan con el texto establecido modernamente, en tales casos señalaremos en nota la numeración correspondiente a* Euclidis opera omnia (*Lipsiae, 1883-1916*). <<

[17] *Traduzco literalmente. La denominación más corriente es la de extrema y media razón, que proviene de* EUCLIDES. <<

[18] Op. Cit.: *30*. <<

[19] Op. Cit: *9*. <<

[20] Op. Cit: 72. <<

[21] *Según me ha hecho observar* JUAN CARLOS GRINBERG, *este teorema es falso, pues, hablando en lenguaje moderno, no es posible obtener con una ecuación el valor de dos incógnitas. Sin entrar a determinar si el error se debe a* PACIOLI *o estaba ya en* CAMPANO, *pues me faltan los elementos de juicio indispensables, doy la traducción literal del enunciado del teorema correspondiente en* EUCLIDES: "*si el cuadrado de un segmento de recta* [*dividido en dos partes*] *es quíntuplo del cuadrado de una de sus partes, dividiendo*

el doble de dicha parte según extrema y media razón, su parte mayor será [*igual a*] *la parte restante del primer segmento*”. <<

[22] Op. cit.: *5*. <<

[23] Op. Cit.: *4*. <<

[24] Op. Cit.: *73* <<

[25] Op. cit.: *8*. <<

[26] Op. cit.: *30*. <<

[27] *He aquí la definición griega*: Αϰϱον κϰαὶ μέσον λόγον εὐϑεῖα τετμῆσϑαι λέγεται, ὅταν ἦ ὡ̔ς ἦ δλη πϱὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πϱὸς τὸ ἔλαττσν. *Traducción: se dice que una recta está dividida según extrema y media razón, cuando toda* [*la recta*] *es a la parte mayor como la mayor* [es] *h la menor*. <<

[28] Op. Cit: *30*. <<

[29] *Véase la definición de este término en la página* 149. <<

[30] *Véase la cuarta figura. La segunda y la tercera deben de haberse incluido por error en la edición original*. <<

[31] Op. Cit.: *31*. <<

[32] *Véase definición correspondiente en la página* 140. <<

[33] *Véase definición en la* página 149. <<

[34] *En* PACIOLI, equidistante = paralelo. <<

[35] *En términos modernos se expresaría así:* $\overline{qn}^2 = 5\,\overline{qm}^2$, *entonces como* $\overline{pn}^2 = 4\,\overline{qn}^2$ *y* $\overline{lm}^2 = 4\,\overline{qm}^2$, *y por lo tanto* $\overline{pn}^2 = 4\,\overline{qn}^2 = 20\,\overline{qm}^2$, *será también* $\overline{pn}^2 = 5\,\overline{lm}^2$. <<

[36] Op. Cit.: *19*. <<

[37] Op. cit.: *11*. <<

[38] *En el título original fue omitido en el texto original; figura sólo en el índice.* <<

[39] *Esto quiere decir que la suma de los cuadrados de* kl *y* el *es el triple del cuadrado de* kl. <<

[40] Op. cit.: *32*. <<

[41] Op. cit.: *5*. <<

[42] Op. cit.: *4*. <<

[43] *Véase nota 39*. <<

[44] Op. cit: *38*. <<

[45] Op. cit.: *4*. <<

[46] Op. cit.: *15. Sin colorario*. <<

[47] Op. cit.: *38*. <<

[48] Op. cit.: *15*. <<

[49] Op. cit.: *15*. <<

[50] Op. cit.: *14*. <<

[51] *Libro III, Def. 4*. <<

[52] *En verdad, el teorema que debe aplicarse a este caro es el que corresponde al libro* VI*, prop. 22*. <<

[53] *Se refiere al círculo que se utiliza en la construcción del icosaedro. Véase el dibujo de la página 92*. <<

[54] Op. cit.: *19*. <<

[55] Op. cit.: *22*. <<

[56] *Es de admirar esta aguda y precursora observación de* PACIOLI*, si se considera que "el misterio" se ha develado con el texto establecido modernamente, en el cual, según señalamos en notas anteriores, se ha invertido el orden de las partes correspondientes a la construcción del cubo y del octaedro y que nuestro autor cita con los números 14 y 15, respectivamente*. <<

[57] *Omisión en el texto original a continuación del último renglón del folio 13*. <<

[58] *Véase la lámina en colores.* <<

[59] *Prisma triangular. Este término (derivado del latín será, cerradura) se ha traducido "serátil".* <<

[60] *Véase lámina en colores.* <<

[61] Op. cit.: *16.* <<

[62] *Esta numeración romana corresponde a las figuras geométricas. Véase LXX, pag. 138.* <<

[63] *Omisión en el texto original a continuación del último renglón del folio 14 verso empieza con la sílaba final* (ma) *de una palabra que es evidentemente* "forma". <<

[64] *Traduzco* laterata *con un correspondiente barbarismo en castellano (del latín* latuseris*, lado). Significa "con caras".* <<

[65] *Esto es, despuntando los vértices y achaflanando las aristas.* <<

[66] *En el texto de* EUCLIDES *establecido en la edición de Leipzig no figura tal descripción.* <<

[67] *Definición 14.* <<

[68] *Definición 21.* <<

[69] Op. cit.: 31. <<

[70] *Definición 18.* <<

[71] *Los números no corresponden a las tablas.* <<

[72] Op. cit.: Scholia *in l. I, ad prop. XXXII (114).* <<

[73] *En el texto original esta parte forma cuerpo con la primera.* <<

[74] Salutem plurimam dicit, *expresión del estilo epistolar latino, análoga, en castellano, a* saluda muy atentamente. *Por lo tanto, es erróneo considerar (como alguien lo ha hecho) las siglas* S. P. D. *como abreviatura de* Si placet Deo. <<

[75] Hedificio avite, *es decir, máquina de dragar cuyo principal elemento debía de ser una especie de tornillo de* ARQUIMEDES. <<

[76] *Título caballeresco* (sperondoro). <<

[77] *Simetría en la acepción clásica significa correspondencia*

armónica tanto de las partes con el todo como de las partes entre sí. Esta acepción fue la única hasta todo el Renacimiento. <<

[78] *Definición 15.* <<

[79] *Para que la segunda proporción sea correcta debería decir "de la parte media". Este error de* PACIOLI *se debe al hecho de que sigue al pie de la letra el texto de* VITRUVIO *que transcribe luego y que la crítica moderna ha restaurado así*: [a medio pectore] ad summum verticem, *etc.* <<

[80] *L. III, c. 1, 2.* <<

[81] *A continuación de la coma corresponde la intercalación* (a medio pectore) *a la cual nos referimos en la nota de la página anterior.* <<

[82] *En los demás casos traducimos esta palabra con el término cuadrado equivalente a listel, filete, etc.* <<

[83] *Se trata de un base ática.* <<

[84] *En el original* cimasa, *que* PACIOLI *usa con el sentido genérico de remate o conocimiento.* <<

[85] Pulvinata *en latín significa "almohadillada".* <<

[86] *Se refiere al equino.* <<

[87] *L. IV, c. I, 5, .* <<

[88] *Columna laterada equivale a pilastra exenta.* <<

[89] *Libro II, corolario de la proposición 7.* <<

[90] PACIOLI *aquí, al referirse en tercera persona a sí mismo, lo hace en tono jocoso.* <<

[91] *Cap. VI. 6.* <<

[92] *Se trata de baquetones decorados.* <<

[93] *Cap. III, 4 y 6.* <<

[94] *El texto dice* indoravano *(doraban) pero leemos* adornavano, *pues nos parece más apropiado.* <<

[95] VITRUVIO *usa el término* corona; cornice, *en rigor, es el*

equivalente italiano. <<

[96] *En este caso se trata de un filete, listel o regleta*. <<

[97] *Omisión en el texto original (folio 33, recto, renglón 2). Termina el renglón así*: og[n]i; *el renglón siguiente empieza con la parte final de una palabra latina* (¿possibilibus?) *así*: bilibus *se possano machinare, etc*. <<

[98] *Omisión en el texto original (folio 33, recto renglón 5). Termina el renglón así*: … avegnache lor forme sieno apla…; *luego empieza el renglón siguiente*… co *e qui nostro dire porremo fine, etc*. <<

[99] *Cap. I, 3-6*. <<

[100] Traducción del *libellus de quinque corporbus reguleribus* de PIERO DELLA FRANCESCA. <<

[101] *Esta cantidad que corresponde a* dc*, debería ser dada y no optativa, pues con sólo dos datos el problema admite infinitas soluciones*. <<

[102] *"Cuadrar" significa halla el área, y también hallar el volumen*. <<

[103] *Según anticipé en mi* Advertencia, *el autor muchas veces nombra radicandos cuando en realidad se refiere a las raíces correspondientes*. <<

[104] *Omisión en el texto original, folio 3 verso, línea 14*. <<

[105] *Obsérvese que en esta tercera parte* PACIOLI *emplea por primera vez la palabra "diagonal" para los cuadrados. Véase la definición que él d, en la página 140*. <<

[106] *L. VI, pro. 24: In quovis parallelogrammo parallelogramma circum diametrum posita similia sunt et toti et inter se*. <<

[107] *En el álgebra medioeval llamábase* restauratio *(de ahí el verbo "ristorare", restaurar) el procedimiento algebraico que se aplicaba cuando aparecía en un miembro de una ecuación algún término negativo, miembro que se consideraba "incompleto". Dicho*

procedimiento consistía en agregar a ambos miembros ese mismo témino, pero con signo positivo, con lo cual se eliminaba el término negativo. <<

[108] Op. cit.: 9. <<

[109] Op. cit.: 10. <<

[110] Op. cit.: 8. <<

[111] Op. cit.: 35. <<

[112] *En realidad, esta relación es a la inversa, tal como se ven en el enunciado citado. Véase también la nota en la página 220*. <<

[113] *Por "línea plana" debe entenderse una "línea" que al rotar genera una superficie plana*. <<

[114] *En el original falta el texto terminal, probablemente la última línea del folio 8, pero, evidentemente, se concluye que por ser* bc *y* gh *"equidistantes", es decir, paralelos, ser* ie = ch*; entonces sustituyendo ch por* ei, *y* bh *por* ad, *será* a d = *suma de los cuadrados de* be *y* ei. *También se deduce fácilmente que* bf *al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de* be *y* ef. <<

[115] *Correctamente, tal proporción es la de 4 con respecta a 3, así como la proporción sesquiáltera es la de 3 a 2; pero, como se habrá observado, el autor reincide constantemente en tales* lapsus. <<

[116] Op. cit.: 14. <<

[117] Op. cit.: 10. <<

[118] *Véase la demostración en el caso 36 del tratado primero*. <<

[119] *El multiplicando no es correcto, pues, ante todo, la parte entera tendría que ser un número de siete cifras. Además, el producto de 20 por el cuadrado de 2133 ⅓, no concuerda con el resultado, que se consigna varias veces*. <<

[120] *Lo que está entre corchetes debe de corresponder aproximadamente a la parte de texto (calculo una línea) omitida entre los renglones 45 y 46 del folio 14 recto (numerado 15)*. <<

[121] *L. I, def. 22.* <<

[122] *L. XI, def. 14.* <<

[123] Op. cit.: 35. <<

[124] Op. cit.: 35. <<

[125] Op. cit.: 35. <<

[126] *Véase nota en la pág. 116.* <<

[127] *Omisión en el texto original (folio 20 recto, línea 30).* <<

[128] *Esta figura es la de la página siguiente vista desde arriba. Las letras deben ser, en correspondencia con* a, *hacia el centro* g: c *y* c; *en correspondencia con* b: d *y* f. *Corríjase de acuerdo a estas indicaciones también la figura de la página siguiente.* <<

[129] *En verdad, esta es la primera vez que se indica la superficie del triángulo* hke *aunque tal indicación esté implícita en el texto que precede. Tal afirmación, y la discontinuidad que se observa en esta demostración, me hace sospechar que debe de haber omisiones ene l texto, si bien la composición tipográfica no ofrece saltos que permitan señalar los lugres correspondientes.* <<

[130] Op. cit.: 18. <<

[131] *Omisión en el texto original, folio 26, línea 39* (e il cono g. e. f. che trouarai essere R. 26 $^{50}/_{147}$ che gionto con la R. 65.850 $^{50}/_{147}$ restava). <<

[132] *Omisión en el texto original, a continuación de la tercera línea del folio 27. He reconstruido lo que falta, basándome en la demostración análoga que se da al principio de este caso.* <<

[133] *Su primera edición aparecida en París en el año 1529, impresa por* GILES GOURMONT, *es hoy prácticamente imposible encontrar, pero puede utilizarse en la excelente reproducción en fototipia, que con erudita introducción, notas, índices y glosario por* GUSTAVE COHEN, *publicó la librería Charles Bosse, en París; (Coulouma y Gaillac-Monrocq); 1931.* <<

[134] Horum inventor Magister LUCAS PACIOLUS de Burgo Sancii

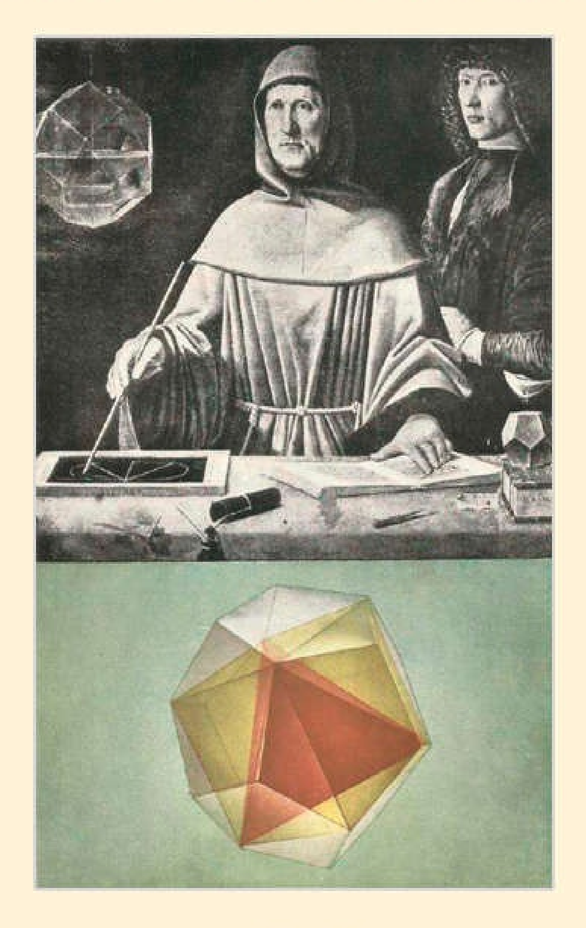
Sepulchri, Ordinis Minorum. <<

[135] Horum inventor Magister LUCAS PACIOLUS de Burgo Sancii Sepulchri, Ordinis Minorum. <<

[136] Horum inventor Magister LUCAS PACIOLUS de Burgo Sancii Sepulchri, Ordinis Minorum. <<

LUCA PACIOLI

LA DIVINA PROPORCIÓN





Índice